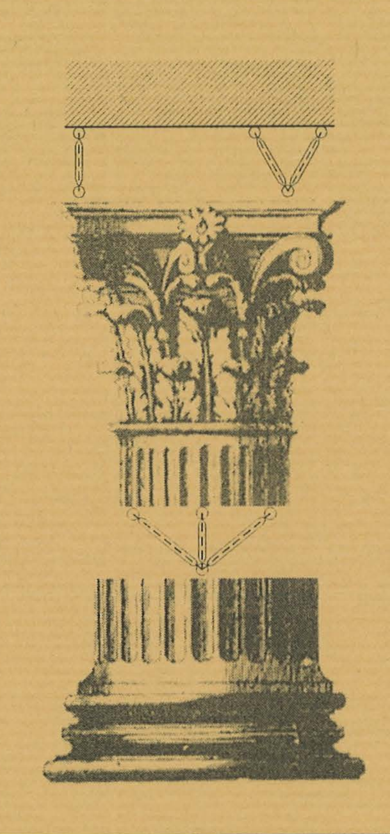
EL MÉTODO

por

RICARDO AROCA HERNÁNDEZ-ROS



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

1-16-09

EL MÉTODO

por

RICARDO AROCA HERNÁNDEZ-ROS

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

1-16-09

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA

NUMERACIÓN

1 Área
16 Autor
09 Ordinal de cuaderno (del autor)

ÁREAS

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

El método

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Nadezhda Vasileva Nicheva
CUADERNO 75.04 / 1-16-09
ISBN: 84-9728-156-X (4ª edición)
Depósito Legal: M-10600-2005

EL MÉTODO

Para comprobar la validez de una estructura hay que verificar que cumple las condiciones establecidas en lo relativo a:

Resistencia

Rigidez

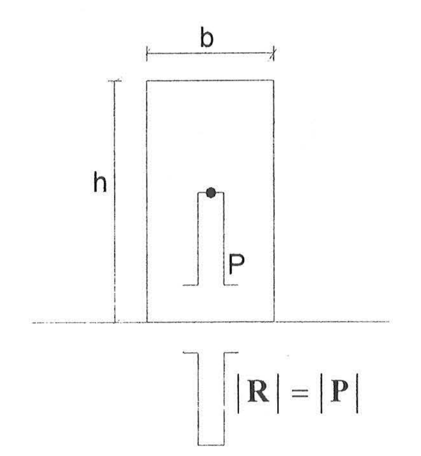
Estabilidad

Una estructura de edificación (salvo en el caso de acciones sísmicas) **está en equilibrio estático**; la expresión matemática de este hecho, aplicada tanto al conjunto de la estructura como a sus partes y manejada de distintas formas, es la herramienta que permite analizar la estructura y verificar el cumplimiento en el grado requerido de las condiciones anteriormente enunciadas.

ACCIONES Y REACCIONES

Las acciones son en gran medida fuerzas variables e imposibles de determinar con exactitud.

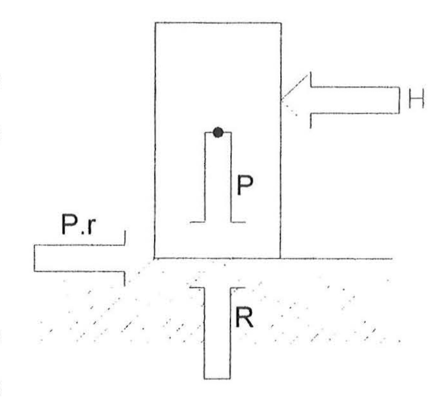
El equilibrio de una estructura es posible porque hay un conjunto de limitaciones al movimiento (la sustentación) que proporciona las reacciones que completan un sistema de fuerzas nulo para cualquier valor previsible de las acciones.



Un ejemplo puede ilustrar fácilmente el papel de las reacciones en el equilibrio y las limitaciones de una situación de equilibrio:

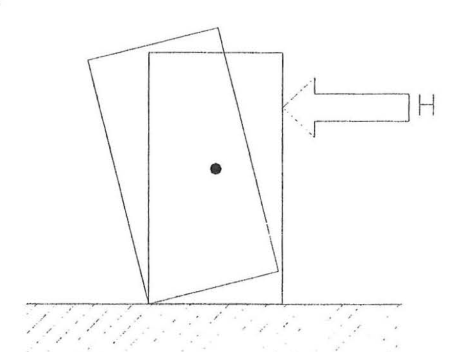
Sea un sólido prismático de peso P sobre una superficie plana indeformable con un coeficiente de rozamiento r. La superficie plana sustenta el sólido impidiendo un movimiento hacia abajo mediante una reacción R igual a P en valor absoluto, sea cual sea el valor de P.

Si además del peso P actúa una fuerza horizontal H, esta no podrá sobrepasar el valor P.r de la reacción máxima de rozamiento.



$$H \leq P \cdot r$$

Ya que si $H > P \cdot r$ el sólido **desliza** con un movimiento uniformemente acelerado. Pero esta condición solo hace viable el equilibrio si el punto de aplicación está próximo a la base del prisma.



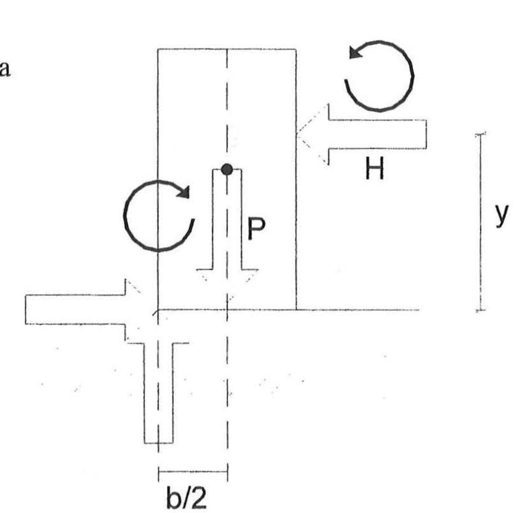
Puede comprobarse fácilmente que una fuerza $H < P \cdot r$ aplicada lo bastante arriba **vuelca** el prisma.

La razón del vuelco es la siguiente.

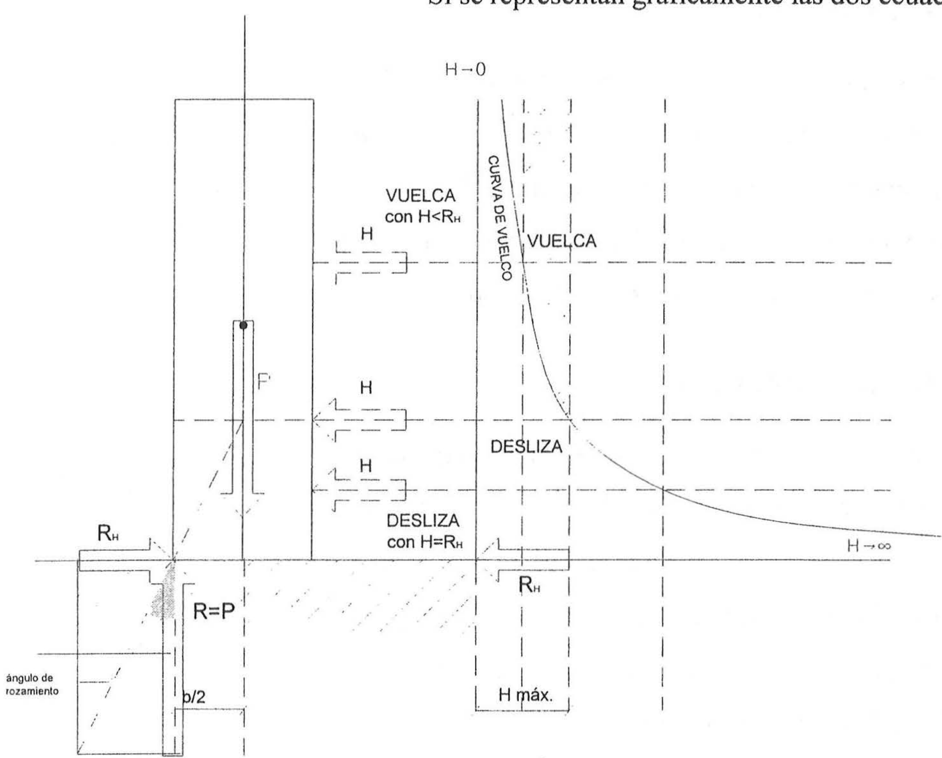
La acción H y la reacción horizontal debida al rozamiento producen un **momento de vuelco** ↺ $y \cdot H$ (negativo si se considera ↻+ como sentido positivo). Frente a este momento hay un momento estabilizante ↻ $\frac{b}{2} \cdot P$, positivo.

Hay equilibrio sólo si $\frac{b}{2} \cdot P \geq y \cdot H$ lo que lleva a una segunda condición de equilibrio para H :

$$H \leq \frac{1}{2} P \cdot \frac{b}{y}$$

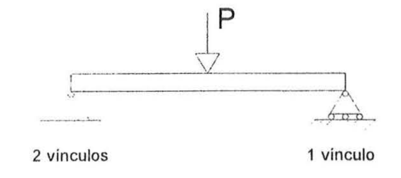


Si se representan gráficamente las dos ecuaciones:



quedan delimitados los valores de la acción H para las que el equilibrio es posible.

Dada la imprecisión de las acciones en la práctica se toma siempre un **coeficiente de seguridad al vuelco.**



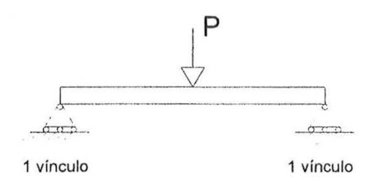
SUSTENTACIÓN ISOSTÁTICA:

En el plano tres condiciones de sustentación y en el espacio seis, igualan el número de movimientos posibles de un sólido indeformable y por tanto el de ecuaciones de equilibrio de la estática que bastan para determinar las reacciones, por lo que basta el modelo de sólido indeformable.

Si una estructura está sustentada isostáticamente, pueden calcularse las reacciones mediante consideraciones de equilibrio sin necesidad de tomar ninguna decisión sobre material ni sobre el dimensionado de los elementos que la componen; basta el esquema.

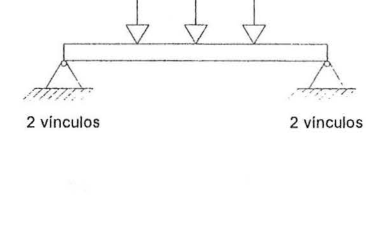
SUSTENTACIÓN HIPOSTÁTICA:

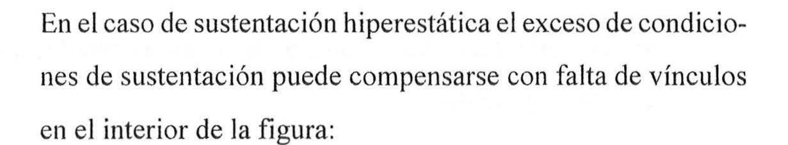
Si hay menos de tres condiciones de sustentación en el plano (y seis en el espacio), **la sustentación debe ser corregida** , aunque las condiciones de simetría o la ausencia de componentes de acciones en alguna dirección permitan soluciones teóricas imposibles de llevar a la realidad.



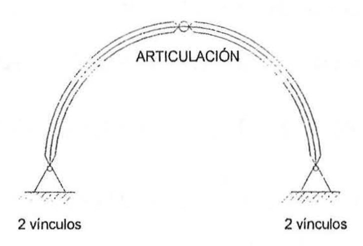
SUSTENTACIÓN HIPERESTÁTICA:

Si hay más de tres condiciones de apoyo en el plano (y más de seis en el espacio), las ecuaciones de la estática solas no permiten calcular las reacciones. Excepcionalmente si en la estructura de la figura sólo actúan cargas verticales y se prescinde del posible efecto de catenaria de la viga deformada, sí se pueden calcular las reacciones.





En el caso de sustentación hiperestática el exceso de condiciones de sustentación puede compensarse con falta de vínculos en el interior de la figura:



Hay cuatro condiciones de sustentación pero la articulación interior del arco permite plantear una ecuación suplementaria.

Cuando el hiperestatismo de la sustentación no está compensado por discontinuidades de la estructura, no pueden calcularse las reacciones con el modelo de sólido indeformable y hay que recurrir a alguna variante del ***método universal.***

CÁLCULO DE REACCIONES EN LOS CASOS DE SUSTENTACIÓN ISOSTÁTICA

Las condiciones de equilibrio pueden aplicarse de forma:

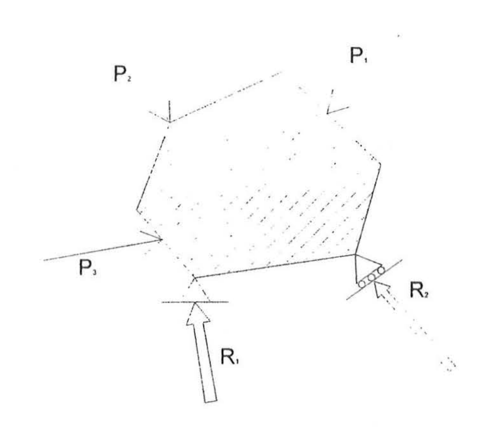
a) gráfica

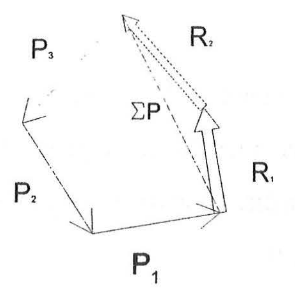
b) analítica (ecuaciones de la estática)

c) analítica (trabajos virtuales)

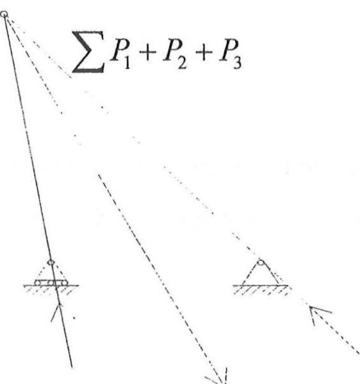
a) Método gráfico:

Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas se satisfacen si el polígono sumatorio de acciones y reacciones es cerrado:





Las de equilibrio de momentos se satisfacen si las reacciones y la resultante de las acciones se cortan en un punto



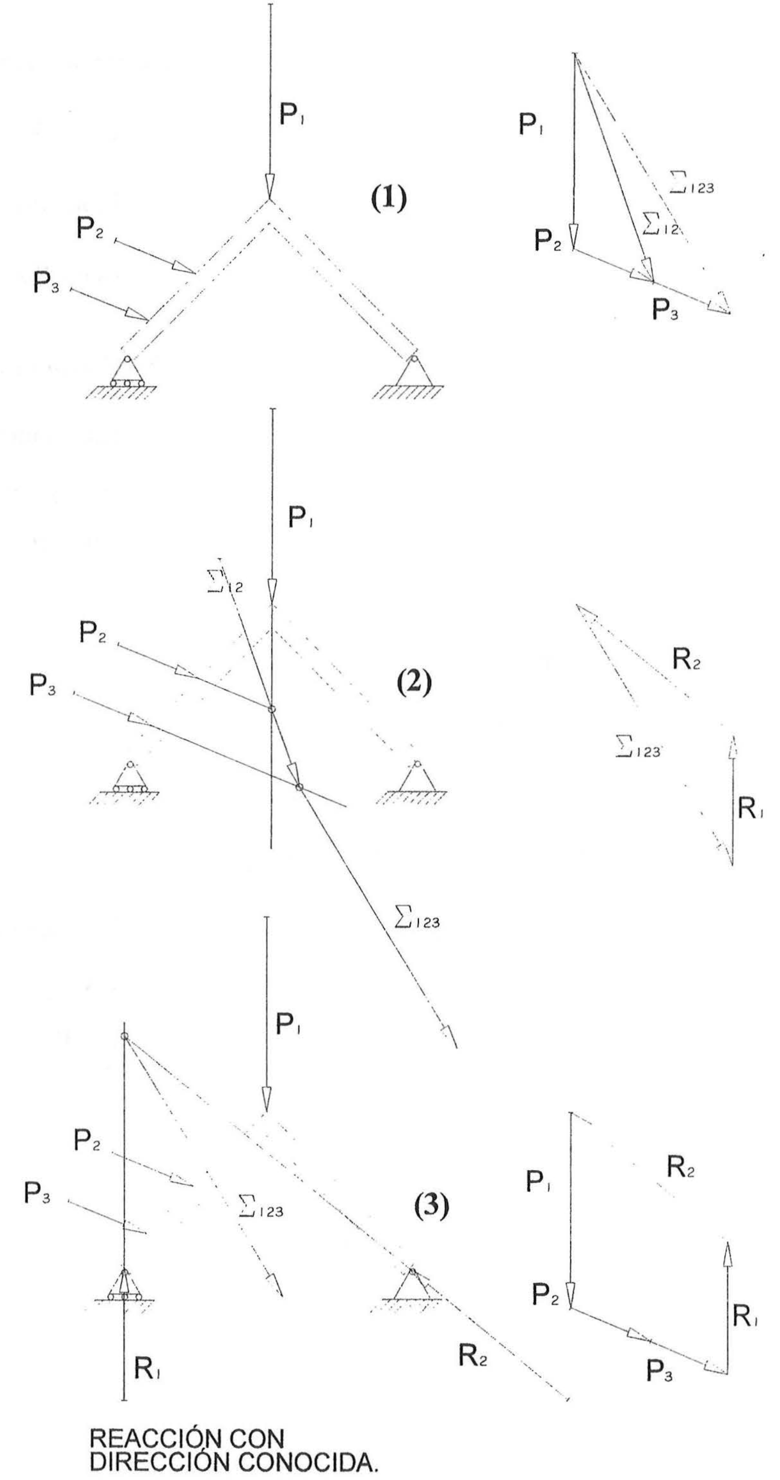
Los valores de las reacciones se obtienen midiendo en la figura.

Se puede determinar la magnitud y posición de la resultante de las acciones y a partir de ella las reacciones.

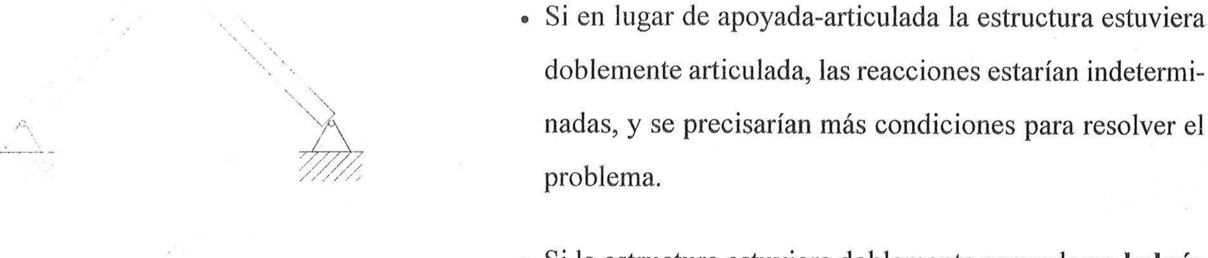
- En primer lugar se halla la **resultante** de las acciones. (1)

- Conocida la dirección de una de las reacciones 2R12. Se puede determinar la dirección de ambas y su magnitud. (2)

- Finalmente puede comprobarse que el sistema está equilibrado. (3)



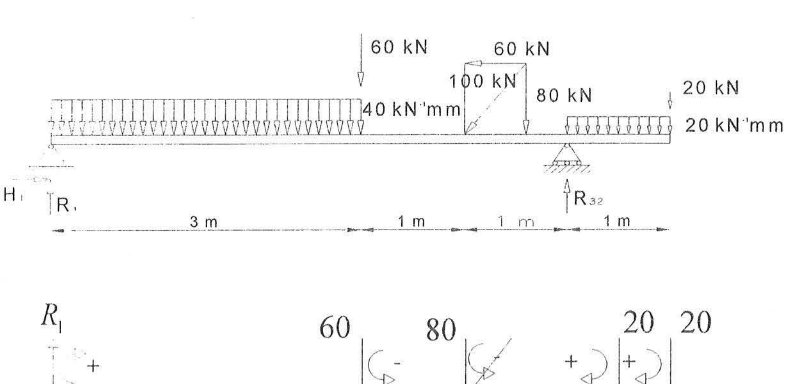
Observaciones

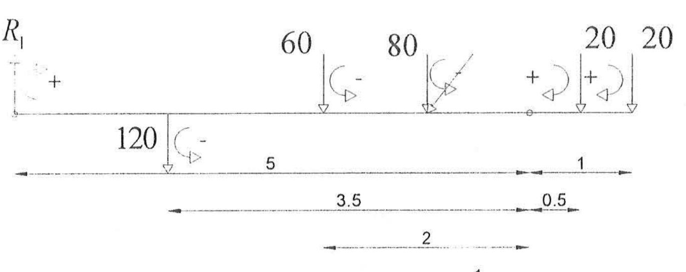


- Si en lugar de apoyada-articulada la estructura estuviera doblemente articulada, las reacciones estarían indeterminadas, y se precisarían más condiciones para resolver el problema.

- Si la estructura estuviera doblemente apoyada **no habría equilibrio** ya que las reacciones no equilibrarían la acción horizontal.

b) Método analítico. Ejemplo 1.





1. Se identifican incógnitas -en el ejemplo: H_1 , R_1 y R_2 -.

2. Si la estructura es **isostática** -como en este caso- se plantean las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum X = 0$$
$$\sum Y = 0$$
$$\sum M = 0$$

(Si la estructura fuera **hiperestática** se necesitarían otras condiciones además de las ecuaciones de equilibrio).

3. Resolución del sistema:

$\sum X = 0 \Rightarrow \mathbf{H_1 = 60\ kN}$

$\sum Y = 0 \Rightarrow 40 \cdot 3 + 60 + 80 + 20 + 20 \cdot 1 = R_1 + R_2 = 300\ \text{kN}$

$\sum M_{(2)} = 0 \Rightarrow 5 \cdot R_1 = 120 \cdot 3{,}5 + 60 \cdot 2 + 80 \cdot 1 - 20 \cdot 0{,}5 - 20 \cdot 1 = 590$

$\mathbf{R_1 = 118\ kN}$

$\mathbf{R_2 = 182\ kN}$

4. Comprobación del equilibrio:

$\sum X \Rightarrow 60 = 60$

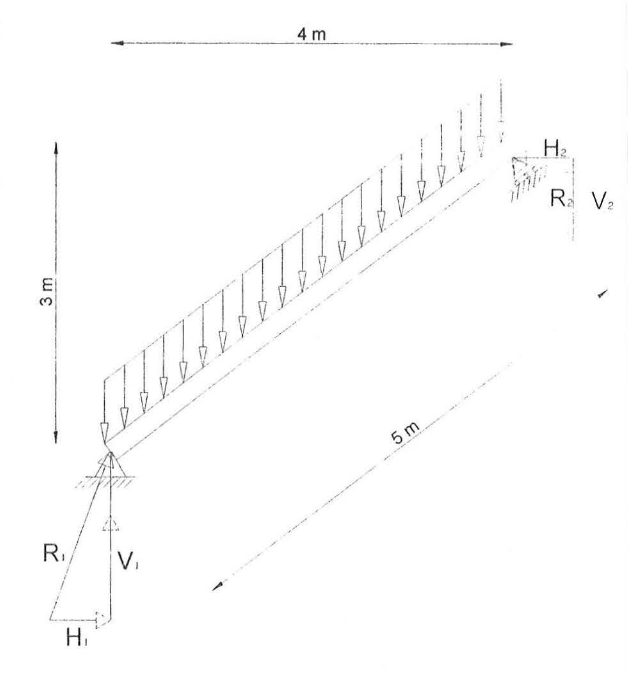
$\sum Y \Rightarrow 118 + 182 = 120 + 60 + 80 + 20 + 20$

$\sum M = 0 \Rightarrow M_{(2)} = 0 \Rightarrow 118 \cdot 5 - 120 \cdot 3{,}5 - 60 \cdot 2 - 80 \cdot 1 + 20 \cdot 0{,}5 + 20 = 0$

Ejemplo 2:

- Se trata de una barra inclinada con una carga vertical de 20 kN por m de faldón inclinado cuya resultante es 20x5 =100 kN Siguiendo los pasos descritos anteriormente.

- Para plantear equilibrio se recurre a la descomposición de fuerzas, y para calcular las reacciones a la semejanzas de triángulos.



$\sum F_H = 0 \Rightarrow H_1 = H_2$

$\sum M_1 = 0 \Rightarrow 100 \times 2 - R_2 \times 5 = 0 \Rightarrow R_2 = 40$ kN

$\sum F_V = 0 \Rightarrow V_1 + V_2 = 100$

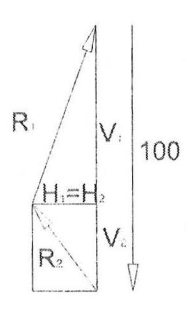
$V_2 = R_2 \cdot 4/5 = 40 \cdot 4/5 = 32$ kN

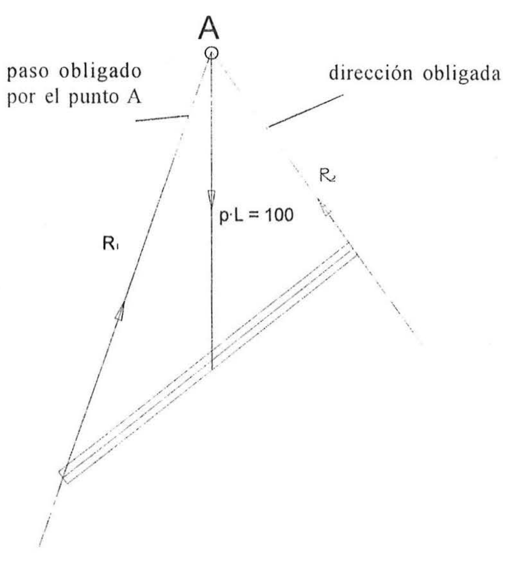
$V_1 = 100 - 32 = 68$ kN

$H_2 = R_2 \cdot 3/5 = 40 \cdot 3/5 = 24$ kN

$H_1 = H_2 = 24$ kN

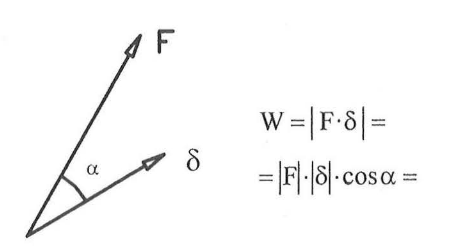
$R_1 = \sqrt{V_1^2 + H_1^2} = 72{,}11$ kN





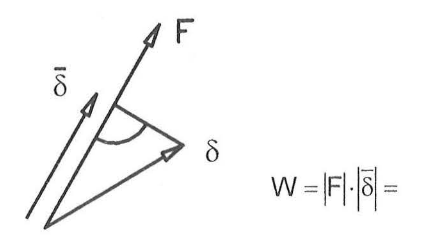
c) Trabajos virtuales.

Se llama **trabajo** realizado por una fuerza F al recorrer un camino δ al **producto escalar F · δ** , que es igual a la fuerza por la proyección del camino en su dirección o a la proyección de la fuerza sobre la dirección del camino por la magnitud de éste. El trabajo es positivo si fuerza y proyección tienen el mismo sentido y negativo si tienen sentidos contrarios.

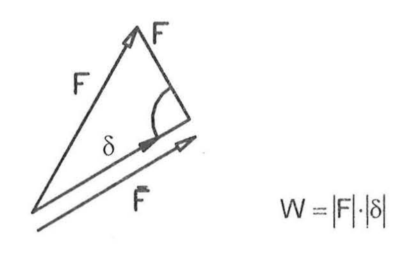


El trabajo de un sistema nulo es 0 para cualquier movimiento.

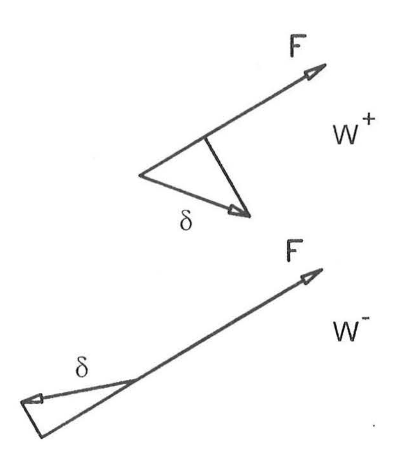
En consecuencia:



Si en un sistema de fuerzas en equilibrio y se introduce un movimiento arbitrario virtual compatible con las condiciones de apoyo, **el trabajo desarrollado es nulo. (Teorema de los trabajos virtuales).**



El **Teorema de los trabajos virtuales** no es más que una forma escalar de expresar el equilibrio. De hecho, pueden generarse todas las ecuaciones de equilibrio sin más que aplicar un movimiento virtual para cada una de ellas: dos traslaciones y un giro en el plano; tres traslaciones y tres giros en el espacio, generan las ecuaciones de equilibrio.

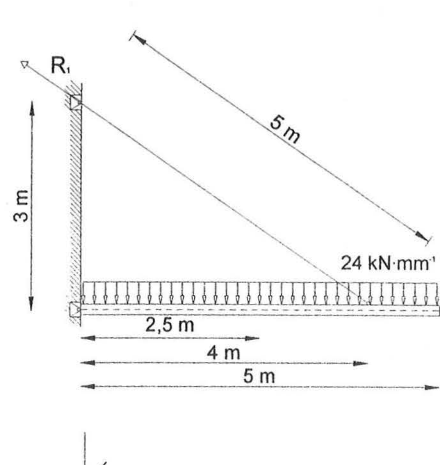


Plantear el equilibrio empleando la expresión de trabajo nulo tiene la ventaja de utilizar escalares en lugar de vectores. El inconveniente es que se pierde información – lo que a veces, si sólo es preciso averiguar pocas cosas, es una ventaja – .

Ejemplo 1 (trabajos virtuales):

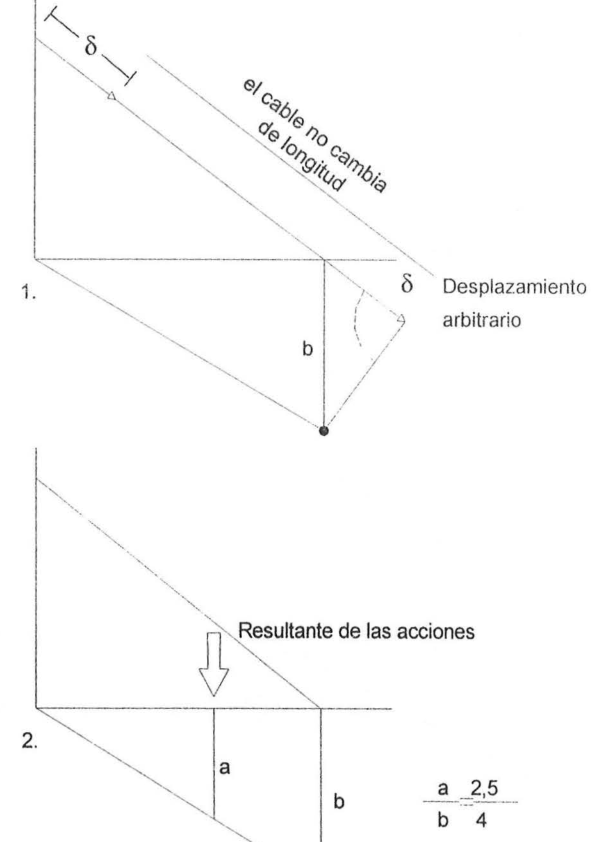
- Cálculo de la reacción R_1 en el cable de la estructura de la figura.

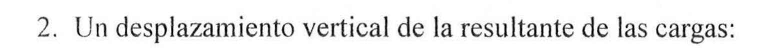
- Se supone un movimiento arbitrario δ del anclaje del cabl en la dirección de R_1 que se traduce en:



1. Un movimiento vertical del anclaje del cable en la viga:

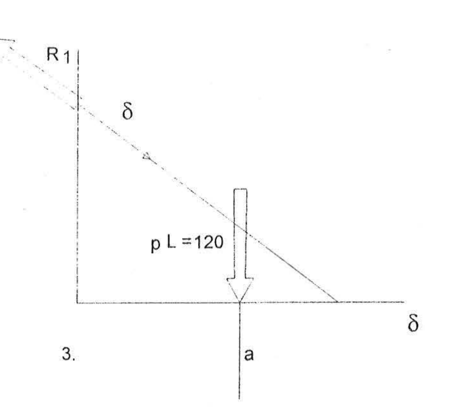
$$\frac{b}{\delta}=\frac{5}{3} \Rightarrow b=\frac{5}{3}\cdot\delta$$





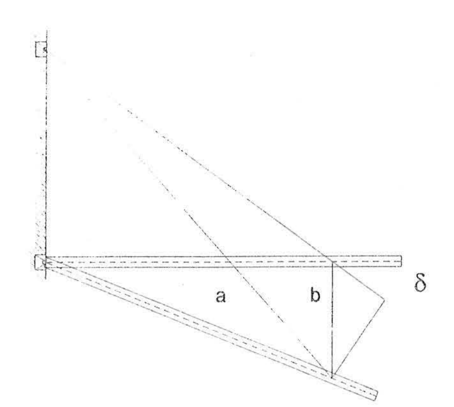
2. Un desplazamiento vertical de la resultante de las cargas:

$$\frac{a}{b}=\frac{2.5}{4}\Rightarrow a=\frac{2.5}{4}\cdot b=\frac{2.5}{4}\cdot\frac{5}{3}\cdot\delta=\frac{12.5}{12}\cdot\delta$$



3. El trabajo total debe ser nulo:

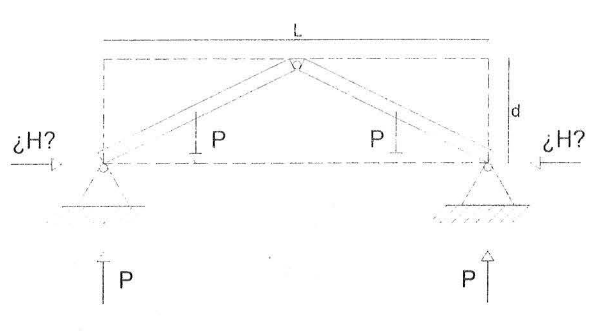
$$-R_1 \cdot \delta + \frac{12.5}{12} \cdot \delta \cdot 120 = 0 \quad \mathbf{R_1 = 125\ kN}$$



Una vez que se conoce R_1 ya es fácil calcular la otra reacción. Basta resolver el mismo problema analíticamente para comprobar que el proceso es más lento.

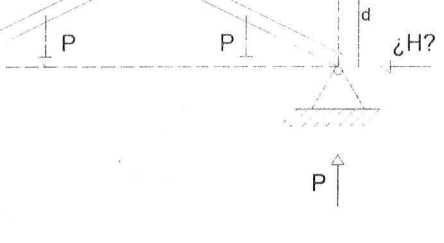
Ejemplo 2 (trabajos virtuales):

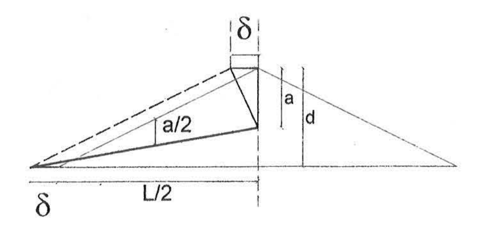
Cálculo de la reacción horizontal



llamando $\lambda = \frac{L}{d}$ para obtener una conclusión genérica.

Un desplazamiento virtual δ del extremo izquierdo en el sentido contrario a H produce un descenso a de la articulación superior de la figura:





de donde:

$$\mathbf{a} = \delta \cdot \frac{1}{\mathbf{d}} \cdot \frac{\mathbf{L}}{2}$$

$$\frac{\mathbf{a}}{2} = \delta \cdot \frac{\mathbf{L}}{4 \cdot \mathbf{d}}$$

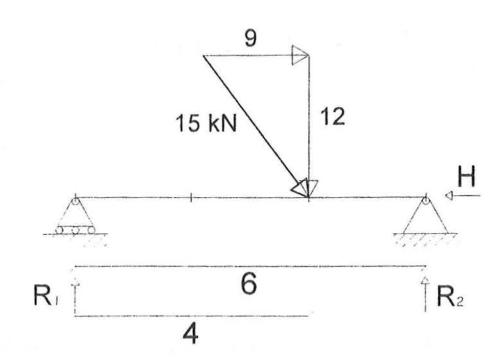
El punto de aplicación de la resultante de las acciones desciende a/2.

$$-H \cdot \delta + P \cdot \delta \cdot \frac{L}{4 \cdot d}$$

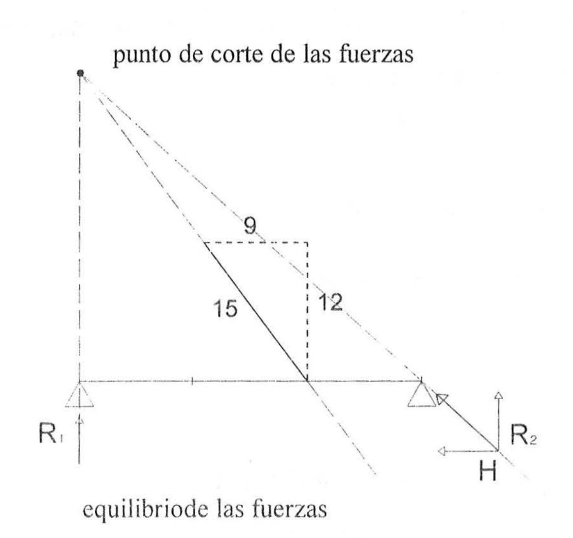
$$\boxed{H = \frac{P \cdot \lambda}{4}}$$

Fórmula general del empuje del arco triarticulado.

Ejemplo Resumen:



punto de corte de las fuerzas



equilibriode las fuerzas

equilibrio de las fuerzas

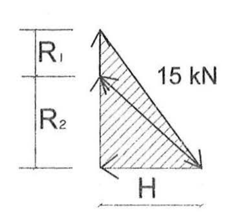
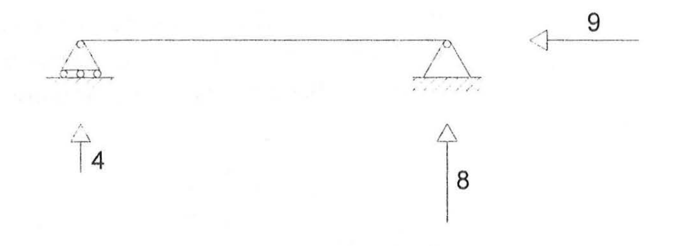


gráfico - medir



$\sum X = 0 \qquad H = 9$

$\sum Y = 0 \qquad R_1 + R_2 = 12$

$\sum M = 0 \qquad R_1 \cdot 6 = 12 \cdot 2 \quad ; R_1 = 4$

analítico - ecuaciones

δ

δ/3

$$\mathbf{R}_1 \cdot \delta - 12 \cdot \frac{\delta}{3} = 0$$

$$\mathbf{R}_1 = 4$$

Trabajos virtuales

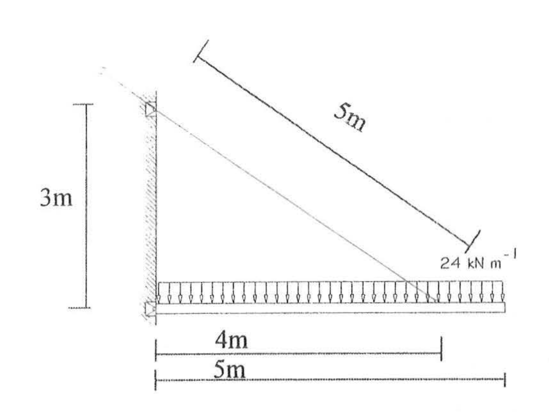
SOLICITACIONES

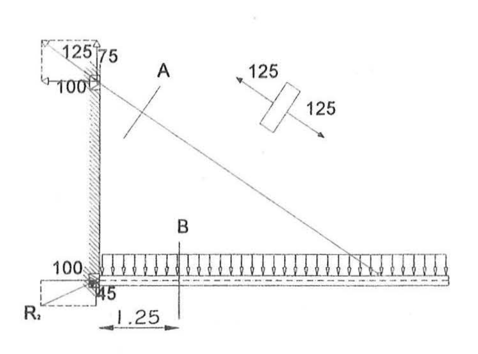
Cuando bastan las condiciones de equilibrio parcial de la estructura para calcular las solicitaciones (resultantes de las tensiones en cortes imaginarios de la misma), se dice que **la estructura es isostática**.

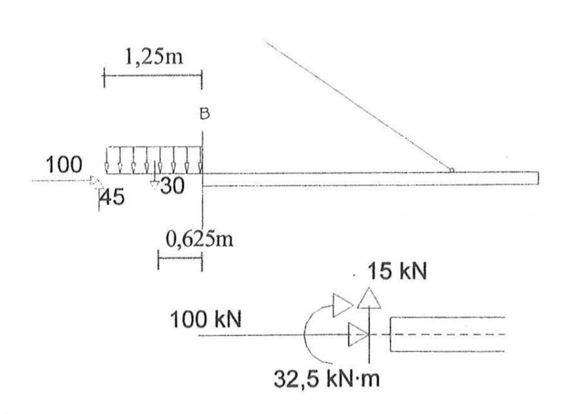
El cálculo de las reacciones es siempre previo al de las solicitaciones, ya que los equilibrios parciales solo pueden plantearse en un contexto de equilibrio global. En una estructura isostática las técnicas de cálculo de las solicitaciones son las mismas que para el de las reacciones.

Por ejemplo:

En los cortes A y B de la estructura anterior.







$$N = -100kN$$
$$V = 45 - 30 = +15kN$$
$$M = 45 \cdot 1,25 - 30 \cdot 0,625 = 37,5kN$$

+15 kN

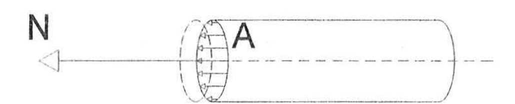
-100 kN

+32,5 kN·m

Cálculo de solicitaciones

Las solicitaciones en una estructura isostática dependen sólo del esquema por lo que pueden calcularse sin aventurar previamente la elección de material ni el dimensionado de los elementos; una consecuencia inmediata es que una vez elegido el material o materiales, **cada elemento de la estructura pueda ser dimensionado de forma estricta**, por lo que puede hablarse de **cálculo de secciones**, lo que no ocurre en las estructuras hiperestáticas.

En el caso de una estructura de barras que tengan sólo solicitaciones axiales.



el dimensionado de las secciones será tal que, en cada uno de ellas

$A \geq \frac{N}{f}$ siendo f el valor de comparación del material.

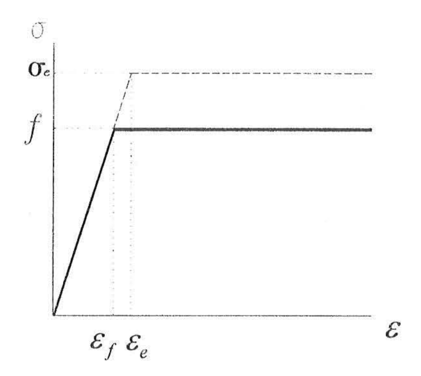
Cabe advertir que en el caso de las barras comprimidas será preciso emplear un factor adicional ω llamado factor de pandeo para tener en cuenta el problema de inestabilidad asociado a la compresión:

$$A \geq \frac{N}{f} \omega$$

Las secciones disponibles, que en cualquier material suelen constituir una gama limitada, obligan generalmente a sobredimensionar las barras.

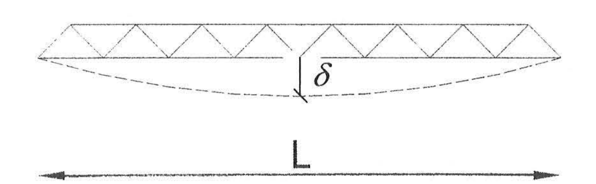
COMPROBACIÓN DE LA RIGIDEZ

Una vez dimensionados los elementos de la estructura puede procederse a comprobar la rigidez, para ello es necesario utilizar el **modelo de sólido deformable para el material**, que implica una gráfica tensión deformación



Como baremo para medir la rigidez de una estructura, se suele usar el movimiento δ de uno de sus puntos en una dirección prefijada, dividido por la longitud L relevante para el caso:

Por ejemplo; en vigas o cerchas se usa el cociente entre el desplazamiento vertical del centro (extremo en el caso de voladizos) y la luz de la viga:

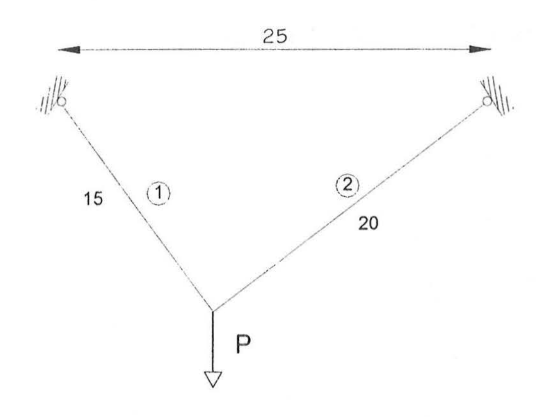


no es pues necesario tener una imagen completa del cambio de forma de la estructura, basta la medida del desplazamiento de una dirección de un punto determinado.

En el caso de esquemas simples la comprobación de la rigidez implica únicamente una sencilla construcción geométrica; que puede abordarse de dos formas:

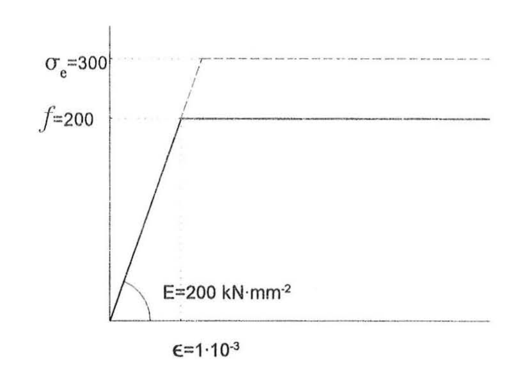
a) **cálculo del límite superior de deformación.**

Para ello basta decidir el esquema y determinar el material; por ejemplo:



carga P vertical actuando sobre dos barras de acero, cuya tensión de comparación es

$f = 200\ \mathrm{N{\cdot}mm^{-2}}$



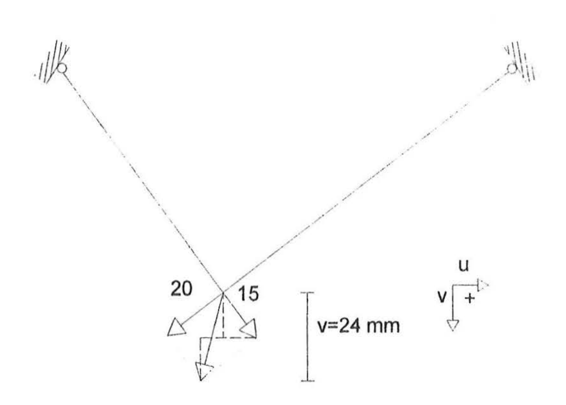
independientemente del valor de P, si el dimensionado es estricto, en cada una de las barras $\varepsilon = 1{\cdot}10^{-3}$ y el límite superior del alargamiento será 15 mm para la barra 1 y 20 mm para la barra 2

Por semejanza de triangulos, el desplazamiento vertical v será:

$$v = \frac{4}{5}{\cdot}15 + \frac{3}{5}{\cdot}20 = 24\mathrm{mm}$$

y el horizontal u:

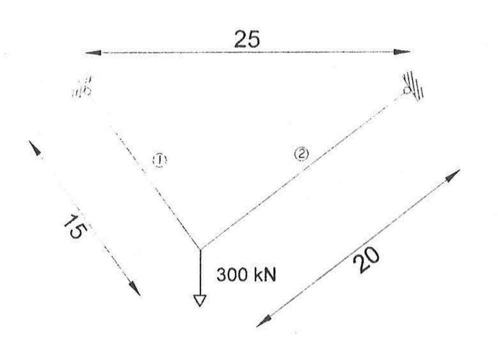
$$u = \frac{3}{5}{\cdot}15 - \frac{4}{5}{\cdot}20 = -7\mathrm{mm}$$



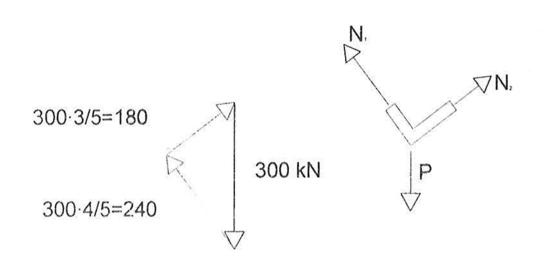
los valores 24 y -7 son los límites superior del desplazamiento y si están dentro de lo admisible, huelga cualquier comprobación adicional.

15
12
9
16
12
20

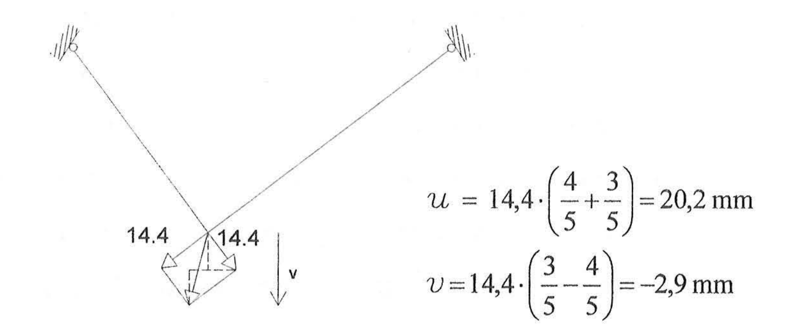
b) Cálculo de la deformación:



Si fuera necesaria una determinación más precisa del movimiento, hay que proceder previamente al cálculo de las solicitaciones y al dimensionado (la estructura real siempre es más rígida que la estricta ya que el dimensionado nunca será estricto)



	BARRA	1	2
m	**longitud**	15.00	20.00
kN	**N**	240	180
mm²	**A**$_{mínima}$	1200	900
mm²	**A**	1250	1250
N·mm^{-2}	σ	192	144
10^{-3}	ε	9,6	7,2
mm	Δ	14,4	14,4



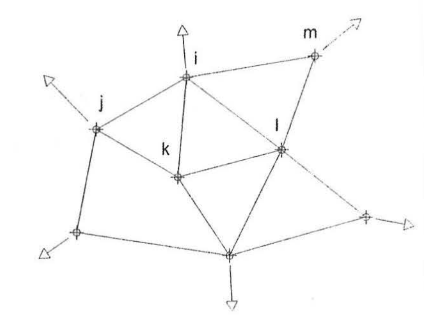
$$u = 14{,}4 \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\right) = 20{,}2 \text{ mm}$$

$$v = 14{,}4 \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\right) = -2{,}9 \text{ mm}$$

Para esquemas complejos es más eficaz emplear el principio de los trabajos virtuales para determinar la rigidez, para ello es preciso estudiar su aplicación a sólidos deformables:

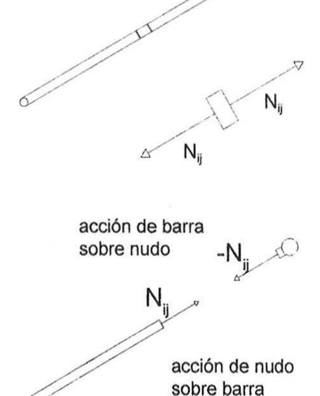
APLICACIÓN DEL TEOREMA DE LOS TRABAJOS VIRTUALES A SÓLIDOS DEFORMABLES

Cuando un sólido está en equilibrio, el sistema de fuerzas (acciones + reacciones) que actúa sobre él tiene una resultante nula. En consecuencia, cualquier movimiento arbitrario del sólido produce un trabajo nulo, lo que es evidente en el modelo de sólido indeformable, pero no lo es tanto en el modelo de sólido deformable, ya que un movimiento arbitrario puede implicar una variación de posición de todos los puntos de aplicación de las fuerzas exteriores, sin relación geométrica alguna, lo que obliga a examinar la cuestión, en una óptica distinta.



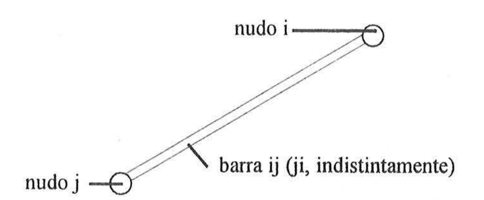
Al admitir la posibilidad de cambio de forma, el modelo de estructura tiene que incluir datos que permitan expresarlo.

Estos datos suelen ser movimiento y eventualmente giro en puntos determinados de la estructura llamados **nodos**. Un ejemplo especialmente claro es el de las **estructuras trianguladas de nudos articulados** en los que los nudos de intersección de las barras proporcionan un sistema de nodos cuyo movimiento permite describir el cambio de forma de la estructura.

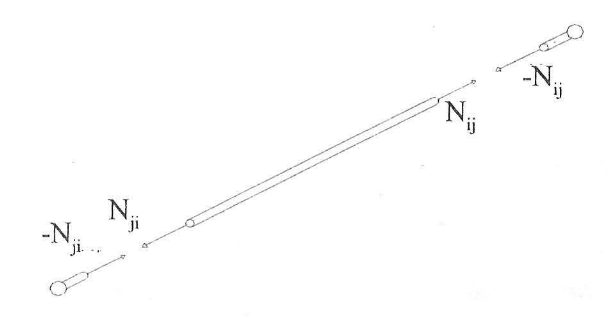


En lo que sigue, aun perdiendo generalidad en la explicación se deduce el teorema de los trabajos virtuales para sólidos deformables en el caso de una estructura triangulada de barras rectas articuladas en los extremos, con cargas y restricciones de movimientos aplicados exclusivamente a los nudos que se

numeran sucesivamente 1,2,....i,j,k,l,..., mientras que las barras se designan con un doble subíndice correpondiente a los nudos que unen:

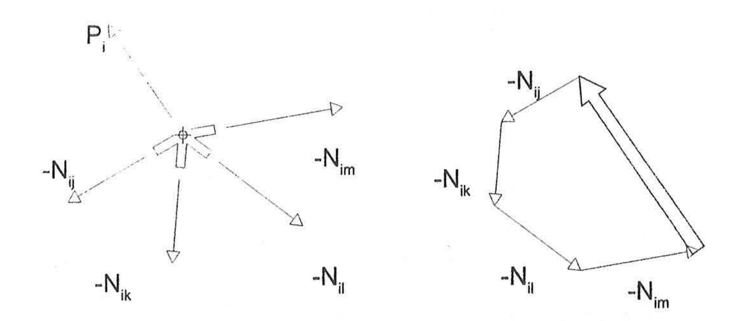


continuando con los convenios, para una barra ij traccionada:

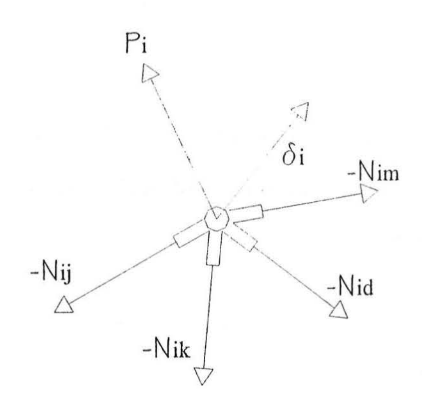


aparecen fuerzas de sentido opuesto en ambos extremos de la barra que se denominan Nij y Nji y a su vez es necesario destacar que el efecto de la barra sobre el nudo es igual y de sentido contrario que el del nudo sobre la barra.

Si la estructura está en equilibrio, lo estará cada uno de sus nudos.



por lo tanto cualquier movimiento δ_i arbitrario del nudo i , generará un trabajo nulo:



$$\{\mathbf{P}_i\}^T \cdot \{\delta_i\} = \overrightarrow{\mathbf{N}_{ij}} \cdot \overrightarrow{\delta_i} + \overrightarrow{\mathbf{N}_{ji}} \cdot \overrightarrow{\delta_j} + \\ + \overrightarrow{\mathbf{N}_{ik}} \cdot \overrightarrow{\delta_i} + \overrightarrow{\mathbf{N}_{ki}} \cdot \overrightarrow{\delta_k} + \\ + \overrightarrow{\mathbf{N}_{il}} \cdot \overrightarrow{\delta_i} + \overrightarrow{\mathbf{N}_{li}} \cdot \overrightarrow{\delta_l}$$

es decir:

$$\overrightarrow{P_i} \cdot \overrightarrow{\delta_i} = \sum_{\text{en el nudo}} \overrightarrow{N_{ij}} \cdot \overrightarrow{\delta_i}$$

un movimiento generalizado de la estructura, expresado por

un vector $\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \dots \\ \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_k \end{Bmatrix}$ como suma de movimientos de los nudos,

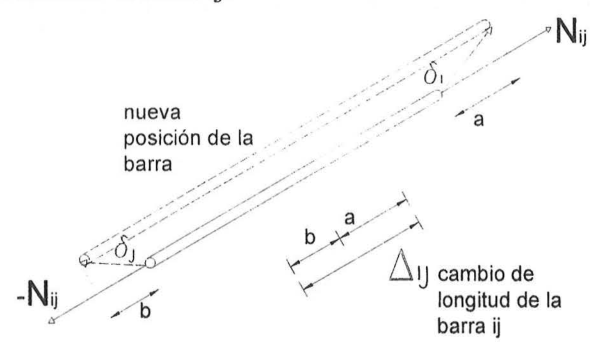
generará también un trabajo nulo:

$$\underbrace{\sum_i \{P_i\}\{\delta_i\}}_{\text{trabajo de las fuerzas exteriores}} = \sum_i \sum_j \{N_{ij}\}\{\delta_i\}$$

El primer miembro es evidentemente el **trabajo virtual de las fuerzas exteriores**.

El segundo miembro admite una simplificación:

Tomando la barra ij:



y agrupando en el segundo miembro de la expresión los términos $N_{ij}\delta_i$ y $N_{ij}\delta_j$ correspondientes a la barra ij se deduce fácilmente que:

$$\overrightarrow{N_{ij}} \cdot \overrightarrow{\delta_i} + \overrightarrow{N_{ji}} \cdot \overrightarrow{\delta_j} = N_{ij} \cdot \Delta_{ij}$$

siendo N_{ij} positivo si la barra está traccionada y negativo si está comprimida, y Δ_{ij} el cambio de longitud de la barra ij, positivo si se alarga y negativo si se acorta en consecuencia una barra traccionada que se alarga y una barra comprimida que se acorta darán lugar a trabajo positivo, mientras que a las otras dos combinaciones posibles corresponderá un trabajo negativo. (Como el movimiento virtual $\{\delta_i\}$ es arbitrario, puede alargar barras comprimidas o acortar barras traccionadas)

La expresión del trabajo nulo queda por lo tanto así:

$$\sum P_i \delta_i = \sum \overline{N_{ij}} \Delta_{ij}$$

trabajo de las fuerzas exteriores trabajo de las fuerzas interiores

y el teorema puede expresarse así:

Para cualquier cambio de forma arbitrario de una estructura en equilibrio, el trabajo de las fuerzas exteriores es igual al trabajo de las fuerzas interiores.

Para una estructura contínua (como una viga o una losa)la expresión toma la forma:

$$\iint \{P_i\}^T \{\delta_i\}\, dS = \iiint \{\sigma\}^T \{\varepsilon\}\, \mathrm{dx} \cdot \mathrm{dy} \cdot \mathrm{dz}$$

El teorema de los trabajos virtuales produce solamente una ecuación y por lo tanto permite calcular una sola cosa, cada vez que se aplica.

Puede usarse de dos formas.

a) **Si se trata de calcular fuerzas, al sistema real de fuerzas en equilibrio se le aplica un movimiento virtual** $\{\delta(1)\}$

b) **Si se trata de calcular movimientos se parte de un sistema virtual de acciones que en el movimiento real de la estructura deberá generar un trabajo nulo**; en este caso cabe la variante de suponer un dimensionado estricto de la estructura en cuyo caso todas las deformaciones unitarias son ε lo que permite calcular **superior de deformación** directamente.

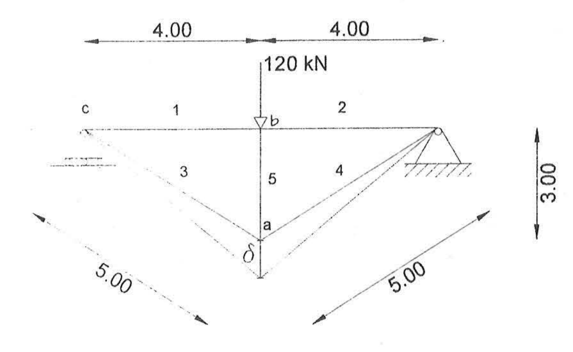
El empleo que suele hacerse del principio de los trabajos virtuales para las comprobaciones de rigidez es el siguiente:

En una estructura cuya resistencia haya sido comprobada, son conocidas las tensiones locales y por tanto las deformaciones locales; para calcular el movimiento de un punto, basta aplicar un sistema virtual de acciones $\{P_i(1)\}$ consistente en una fuerza unidad en el punto y con la dirección del movimiento que se pretende calcular esta fuerza dará lugar a unas reacciones virtuales $\{R\ (1)\}$ y unas solicitaciones $\{N_{ij}\ (1)\}$.

Siendo δ el movimiento de posición y dirección determinados cuya magnitud se pretende calcular: como no existe otra fuerza exterior ya que la sustentación no se mueve y por tanto las reacciones no generan trabajo:

$$\underbrace{1 \cdot \delta}_{\text{trabajo de las fuerzas exteriores}} = \underbrace{N_{ij}\ (1)}_{\text{solicitaciones virtuales}} \cdot \underbrace{\Delta_{ij}}_{\text{deformaciones reales locales}}$$

las deformaciones locales reales Δ_{ij} son conocidas y las solicitaciones $N_{ij}(1)$ han de ser calculadas precisamente para comprobar la resistencia, lo que permite calcular δ. Un ejemplo sencillo sirve para aclarar el procedimiento a seguir:



Estructura en madera de calidad

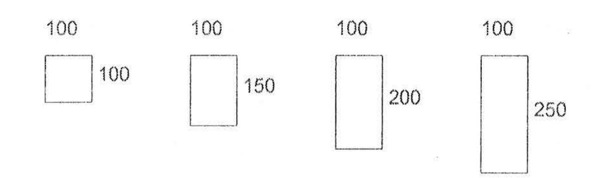
$f = 10 \text{ N·mm}^{-2}$

$E = 12{,}5 \text{ kNmm}^{-2}$

$\varepsilon_f = 0{,}8 \cdot 10^{-3}$

con una carga vertical de 120 kN en el nudo b

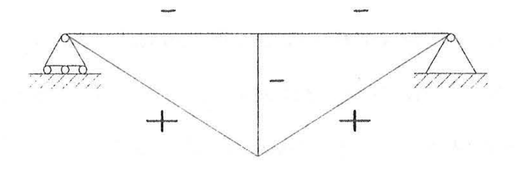
Se dispone de secciones de madera de



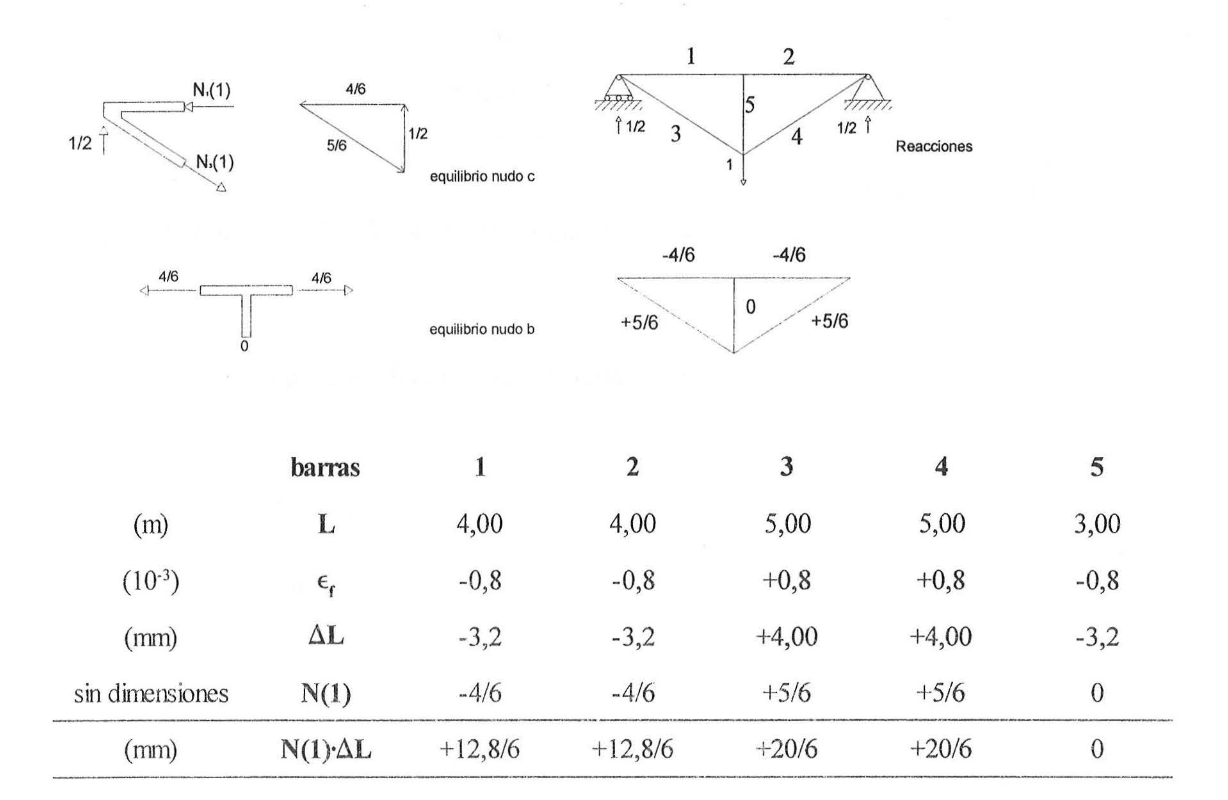
y el factor de pandeo de las barras comprimidas es $\omega = 3$ para las barras 1 y 2 y $\omega = 2$ para la barra 5

Se pretende calcular el movimiento vertical δ del nudo a para comprobar la rigidez de la estructura:

1. **Límite superior de la deformación:**
   del examen de la figura se deduce que el signo de las solicitaciones será:



Se aplica una fuerza virtual 1 (sin dimensiones) en el nudo a



	barras	1	2	3	4	5
(m)	**L**	4,00	4,00	5,00	5,00	3,00
(10^{-3})	ϵ_f	-0,8	-0,8	+0,8	+0,8	-0,8
(mm)	**ΔL**	-3,2	-3,2	+4,00	+4,00	-3,2
sin dimensiones	**N(1)**	-4/6	-4/6	+5/6	+5/6	0
(mm)	**N(1)·ΔL**	+12,8/6	+12,8/6	+20/6	+20/6	0

$$\sum N(1)\cdot\Delta L = \frac{65,6}{6} = 10,9mm = \delta$$

el límite superior de deformación es de 10,9mm.

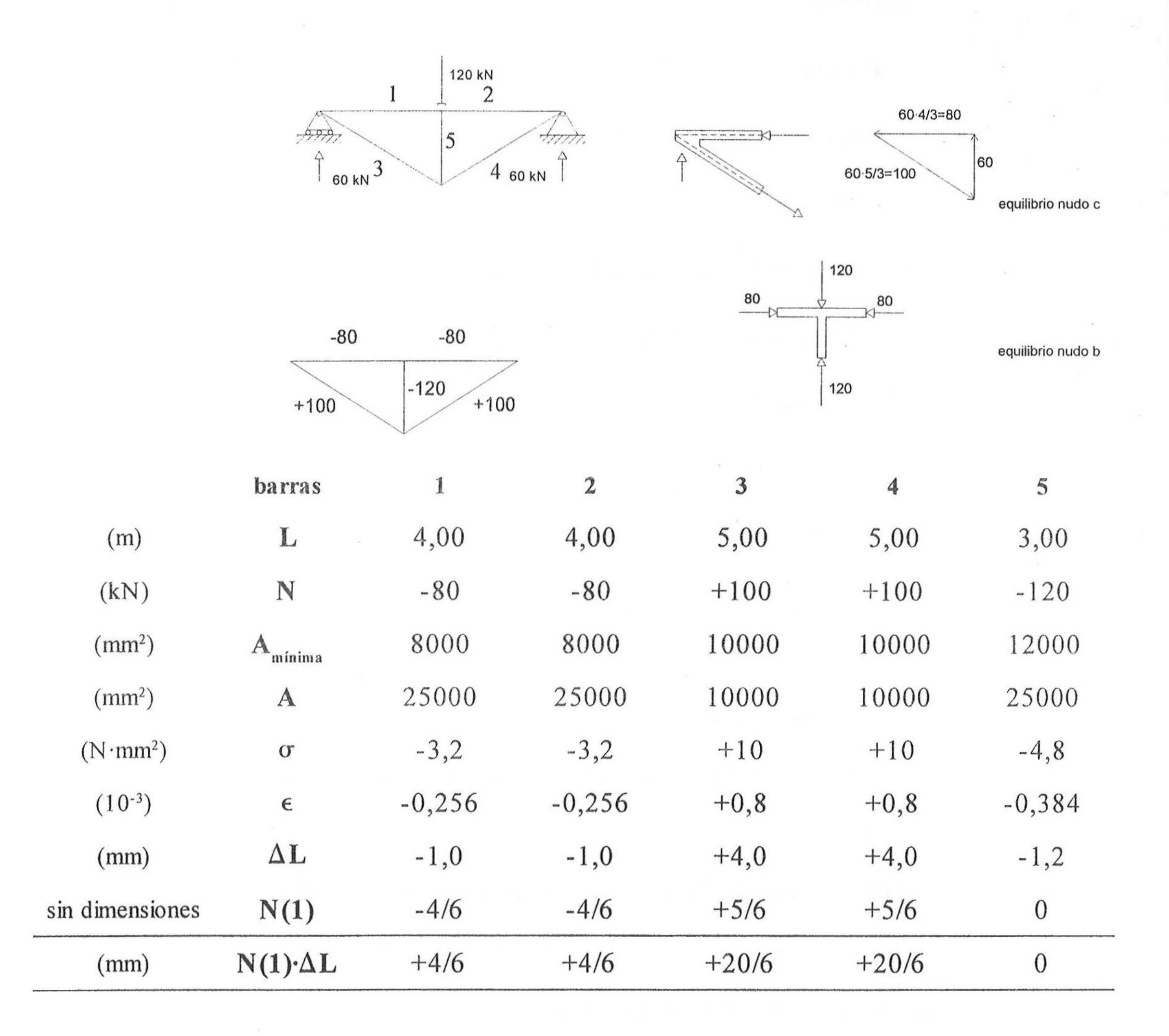
el baremo de rigidez suele establecerse en términos de d/L (deformación relativa)

$$\frac{\delta}{L} = \frac{10,9}{8000} = \frac{1}{734}$$

difícilmente se establecerá una condición de rigidez más rigurosa que la de no sobrepasar $\mathbf{\frac{1}{500}}$, en consecuencia en esta estructura no sería preciso calcular la deformación real, **el esquema asegura una rigidez suficiente.**

2. Deformación real.

Si a modo de ejercicio, se pretende calcular la deformación real, es preciso previamente calcular las solicitaciones y dimensionar las barras.



	barras	1	2	3	4	5
(m)	L	4,00	4,00	5,00	5,00	3,00
(kN)	N	-80	-80	+100	+100	-120
(mm^2)	$A_{mínima}$	8000	8000	10000	10000	12000
(mm^2)	A	25000	25000	10000	10000	25000
($N\cdot mm^2$)	σ	-3,2	-3,2	+10	+10	-4,8
(10^{-3})	ϵ	-0,256	-0,256	+0,8	+0,8	-0,384
(mm)	ΔL	-1,0	-1,0	+4,0	+4,0	-1,2
sin dimensiones	N(1)	-4/6	-4/6	+5/6	+5/6	0
(mm)	$N(1)\cdot\Delta L$	+4/6	+4/6	+20/6	+20/6	0

$$\sum N(1)\cdot\Delta L = \frac{48}{6} = 8mm = \delta$$

el descenso real del nudo a es de 8mm < 10,9mm del límite máximo.

El descenso relativo es: $\frac{\delta}{L} = \frac{8}{8000} = \frac{1}{1000}$

PROCESO DE ANÁLISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

1. Determinación del esquema de la estructura y su sustentación *(diseño)*

2. Cálculo de acciones (P)

3. Cálculo de reacciones (R)

4. Cálculo de solicitaciones (N)

5. Elección del material *(diseño)* (*f*, E)

6. Cálculo de las áreas estrictas ($A_{mínima}$)

7. Elección de las secciones reales (A)

   $A = A_{mínima}$ en piezas traccionadas

   Si $A = A_{mínima} \cdot \omega$ en piezas comprimidas

   se cumple la condición de resistencia y la de estabilidad de las barras comprimidas.

8. Cálculo del límite superior de deformación (si hay dudas puede hacerse un tanteo antes de tomar una decisión en el punto 1)

   Si δ_{sup}/L cumple el criterio de rigidez no es preciso realizar ulteriores comprobaciones, en caso contrario se continúa

9. Cálculo de la deformación real δ

   Si δ/L no cumple el criterio de rigidez hay que modificar el esquema (en general haciéndolo menos esbelto) o volver al punto 7 dimensionando con criterios de rigidez.

NOTA: en las estructuras isostáticas carece de sentido la comprobación de la resistencia por el método de la carga última, ya que en cuanto plastifica uno de sus elementos se convierten en un mecanismo.

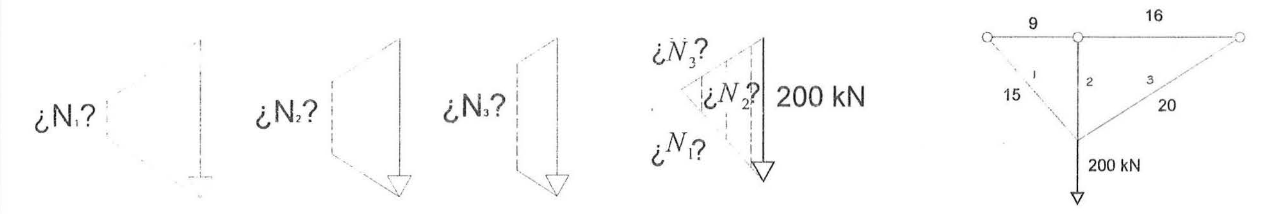
ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS

Cuando las ecuaciones de la estática no bastan para calcular las reacciones o las solicitaciones caben dos caminos:

a) Simplificar el problema mediante la consideración del comportamiento elastoplástico del material, lo que conduce al **método de la carga última**.

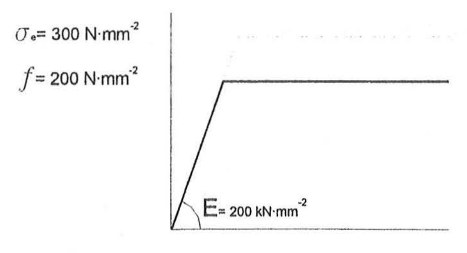
b) Plantear el problema de manera que haya coincidencia entre el número de ecuaciones y el de incógnitas, lo que conduce al que llamaremos **método universal**, también utilizable para estructuras isostáticas.

Una estructura muy simple puede plantear una indeterminación isostática:



el polígono puede cerrarse de infinitas maneras, el cómo lo haga no depende ya sólo del esquema, sino también de las dimensiones y el material de los cables que es necesario decidir previamente, lo que supone determinaciones adicionales de diseño.

Partiendo de un acero:



y predimensionando los cables con barras ϕ de 600 mm^2 de sección.

Para cualquiera de los dos métodos es preciso analizar la gráfica solicitación/deformación de un elemento, en este caso la gráfica N/Δ de cada una de las barras.

La gráfica tiene dos partes:

Para cargas moderadas, el material está en periodo elástico y dada una solicitación N:

$$\left.\begin{array}{l}\sigma = \dfrac{N}{A} \\ \left.\begin{array}{l}\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} \\ \Delta = \varepsilon \cdot L\end{array}\right\} \Delta = \dfrac{\sigma \cdot L}{E}\end{array}\right\} \Delta = N \cdot \frac{L}{A \cdot E}$$

y a la inversa:

$$N = \frac{A \cdot E}{L} \cdot \Delta$$

el valor $\frac{A \cdot E}{L} = k$ se denomina **rigidez** de la barra, para barras sólo comprimidas o extendidas la rigidez es solo un número (para barras que puedan admitir momentos y para elementos más complejos, hay una **matriz de rigidez del elemento [k]** que relaciona solicitaciones y cambios de forma:

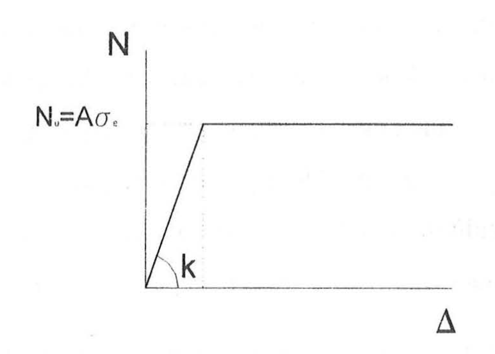
$$\{N\} = [k]\{\Delta\}$$

la matriz k es cuadrada y simétrica respecto a la diagonal principal $\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$)

la relación N/Δ es lineal, con pendiente k hasta que el material llega al límite elástico σ_e, lo que sucede para un valor N_u llamado **solicitación última**

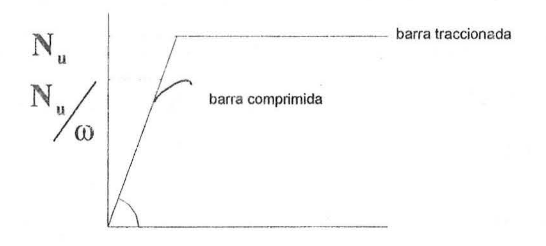
$$N_u = A \cdot \sigma_e$$

Quedando una gráfica de la forma:



la barra no puede soportar una solicitación mayor que N_u, pero al llegar a ella no se rompe sino que soporta una solicitación N_u constante independientemente de Δ.

Las barras comprimidas presentan un comportamiento distinto de las traccionadas y las gráficas suelen ser:



lo que debe tenerse en cuenta cuando se aplica el método de la carga última.

MÉTODO DE LA CARGA ÚLTIMA

Si en una estructura se multiplican las acciones por un factor γ creciente, las solicitaciones aumentan linealmente hasta que un elemento de la estructura alcanza el valor de la solicitación última. Cuando esto sucede, si el material es suficientemente dúctil (y el modelo así lo supone), no se produce la rotura sino que **la solicitación del elemento pasa a ser una fuerza N_u, es decir, pasa de ser una incógnita a ser un dato.**

Si la estructura es isostática, cuando un elemento alcanza la solicitación última, se produce la rotura, por lo que la relación entre la carga última y la de servicio es la misma que entre la tensión máxima y el límite elástico del material. $\gamma = \frac{P_u}{P} = \frac{\sigma_e}{\sigma_{máx}}$

En una estructura hiperestática la progresiva plastificación de elementos va restando hiperestaticidad a la estructura, hasta que en el camino hacia la ruina llega un momento en que se hace isostática y por tanto las solicitaciones de los elementos no plastificados pueden calcularse mediante las ecuaciones de la estática.

En el método se fuerza aún más la situación y se elige el momento en que justamente llega a la solicitación última un elemento más de lo preciso para transformar la estructura en isostática, en estas condiciones, el más mínimo aumento de la carga transformaría ya la estructura en un **mecanismo**, es decir un esquema incapaz de mantener la forma.

El factor de ampliación de carga γ que existe en ese momento se llama **coeficiente de seguridad frente a la rotura** y la carga que la produce se llama **carga última** P_u

$$P_u = P \cdot \gamma \qquad \gamma = \frac{P}{P_u}$$

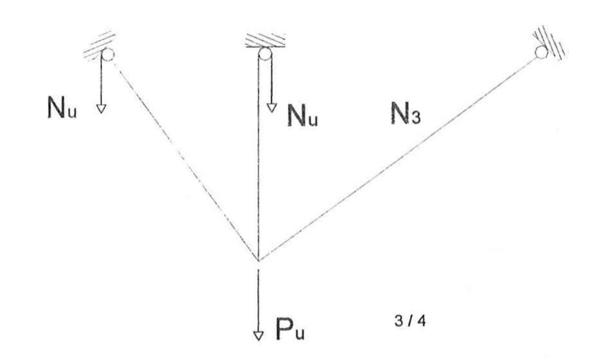
Procedimiento operativo:

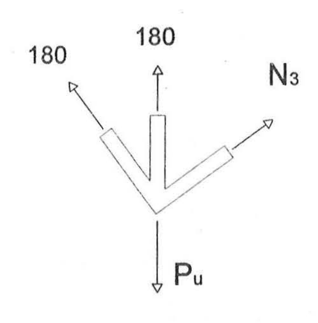
1. Se calcula la solicitación última de los distintos elementos, en este ejemplo, para todos ellos:

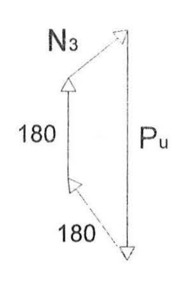
$$N_u = \frac{600 \cdot 300}{1000} = 180\text{kN}$$

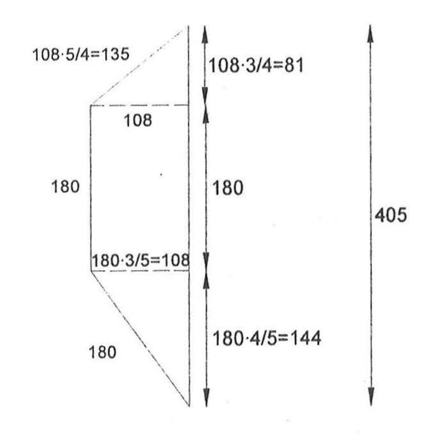
2. Se aventura la hipótesis del orden de plastificación de las barras, en este caso 2, 1, 3.

3. La plastificación de la barra 2 convierte a la estructura en isostática pero puede seguirse aumentando la carga hasta que la solicitación de la barra 1 sea infinitesimalmente menor que N_u; con estos datos se calcula la carga última P_u y se determina el coeficiente de seguridad γ









$$\mathbf{N_3} = 135\textbf{kN}$$

$$\mathbf{P_u} = 144 + 180 + 81 = 405\textbf{kN}$$

$$\boxed{\frac{\mathbf{P_u}}{\mathbf{P}} = \frac{405}{200} = 2{,}025 = \gamma}$$

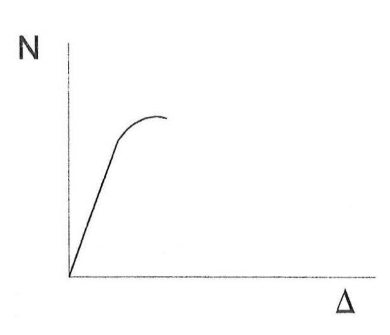
la barra no plastificada tiene una solicitación $N_3 = 135\text{ kN} < 180$, luego la elección de barras plastificadas era correcta; de resultar en algún elemento una solicitación mayor que la última quiere decir que ha habido un error y debe reiniciarse el proceso. El coeficiente de seguridad a rotura es 2'25, perfectamente aceptable, incluso alto.

El método de la carga última es muy rápido y cómodo, como contrapartida presenta algunos inconvenientes:

a) Es preciso hacer una hipótesis sobre el orden de plastificación de los elementos, aunque luego puede verificarse lo acertado de la hipótesis lo que no siempre es tan fácil como en este caso; y, lo que es peor, de un error resulta siempre un coeficiente de seguridad más alto que el real.

b) No sirve para comprobar la rigidez de la estructura, aunque es fácil calcular la deformación en el momento de la rotura, esta va acompañada casi siempre de movimientos inaceptables que poco tienen que ver con los que se producen para cargas de servicio.

c) La gráfica tensión/deformación del material debe tener un escalón de relajación claro, lo que ocurre en los metales, pero es más discutible en el hormigón y las fábricas.



d) Debe evitarse a toda costa mediante el adecuado sobredimensionado la plastificación de los elementos comprimidos ya que en ellos la gráfica N/Δ no presenta escalón de relajación.

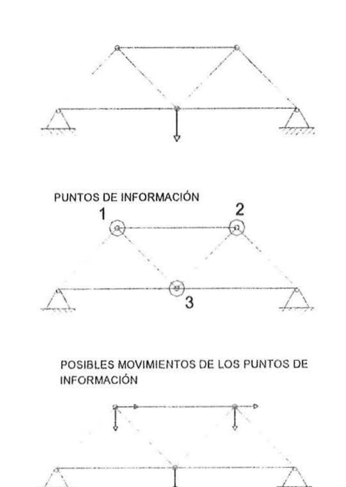
e) No es fácilmente automatizable por lo que no son frecuentes los programas de ordenador que lo usan.

Pese a estos inconvenientes, su comodidad de manejo lo hace extraordinariamente útil, sobre todo en fases de diseño.

MÉTODO UNIVERSAL

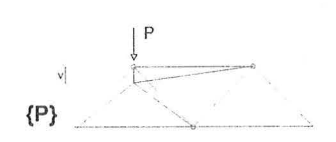
A continuación se expone un método que permite comprobar la resistencia y la rigidez de cualquier estructura de una forma sistemática y por tanto automatizable —es decir, programable para un ordenador—.

El método en esencia consiste en:



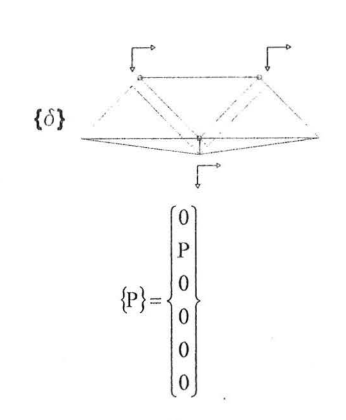
Dada una estructura y elegido un sistema de información que consta un conjunto de posibles movimientos $\{\delta\}$ llamados **grados de libertad** de una serie de puntos, se puede formular una matriz [K] —matriz de rigidez de la estructura— que relaciona los movimientos relevantes de los puntos de información (grados de libertad) con las fuerzas exteriores $\{P\}$ —definidas en función del sistema de información— necesarias para producirlos. Se puede escribir:

$$\{P\}=[K]\cdot\{\delta\}$$



Para cualquier sistema $\{P\}$ de acciones bastará invertir la matriz de rigidez para obtener:

$$\{\delta\}=[K]^{-1}\cdot\{P\}$$



Calculados así los movimientos $\{\delta\}$ es inmediato obtener las deformaciones unitarias correspondientes; de ellas las tensiones, y comprobar que $\sigma_{máx} \leq f$

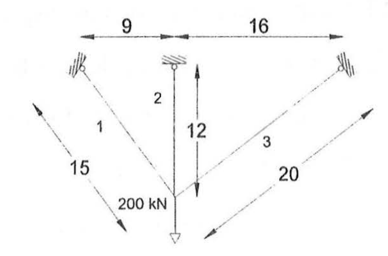
Como en el paso previo se ha calculado el cambio de forma de la estructura $\{\delta\}$ la comprobación de la rigidez es obvia.

$$\{\delta\}=\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

El método presenta la ventaja de que al expresar el comportamiento de la estructura en términos de movimientos de los grados de libertad, el número de ecuaciones coincide siempre con el de incógnitas, sea la estructura isostática o hiperestática —si es hipostática la matriz [K] es singular, su determinante es 0 y no existe $[K]^{-1}$—

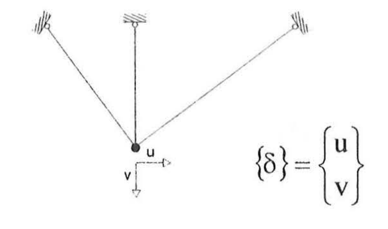
Tiene el inconveniente de que la estructura debe dimensionarse previamente al análisis, por lo que en estructuras isostáticas se pierde la ventaja del dimensionado estricto en función de las solicitaciones, aunque al no depender estas del dimensionado, éste puede ajustarse a posteriori en función de los resultados del análisis sin que sea preciso repetirlo.

La exposición se acompaña en paralelo de la solución de un ejemplo consistente en una carga de 200 kN colgada de tres barras de acero de igual sección:



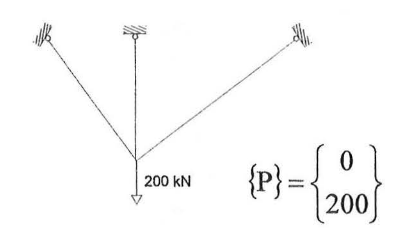
1.- **Elección del sistema de información de la estructura** —grados de libertad— $\{\delta\}$, que es una lista de los desplazamientos y giros posibles.

En este caso se consideran significativos los dos posibles movimientos del punto de aplicación de la carga.



$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

2.- **Expresión de las acciones {P} en términos de los grados de libertad**— debe tenerse en cuenta que sólo puede verse la estructura en función de los grados de libertad y las acciones sólo pueden ser expresadas en los mismos términos que $\{\delta\}$ (a desplazamientos corresponden fuerzas y a giros, momentos) —.



$$\{P\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

3.- **Descomposición de la estructura en elementos sencillos y determinación de las matrices de rigidez correspondientes a cada uno de ellos [k_i].**

BARRAS	Longitud en mm	Área en mm²	E en kN·mm⁻²	K=(E·A)/L_i kN·mm⁻¹
1	15000	600	200	8
2	12000	600	200	10
3	20000	600	200	6

$$[K_1]=\left[\frac{200\cdot 600}{15000}\right]=[8] \qquad [K_2]=\left[\frac{200\cdot 600}{12000}\right]=[10] \qquad [K_3]=\left[\frac{200\cdot 600}{20000}\right]=[6]$$

4.- Ensamblaje de la matriz [k_u]

$$[K_u]=\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad [K_u]=\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix}$$

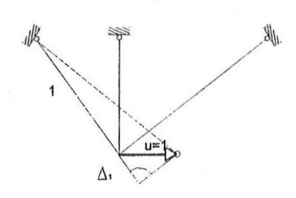
que relaciona los movimientos {Δ} de cada elemento con sus solicitaciones {N} ⇒ {N} = [K_u] · {Δ}

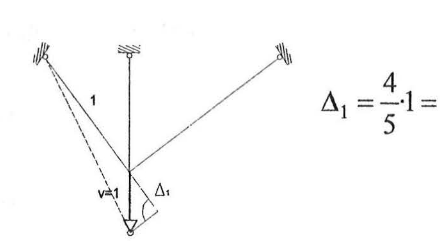
5.- Cálculo de la matriz de relación [B] que expresa los movimientos propios de los elementos {Δ} en función de los grados de libertad {δ}

$$\{\Delta\}=[B]\{\delta\} \quad \Rightarrow \{\Delta\} = [B]\cdot\{\delta\}$$

$$\{\delta\}=\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} \qquad\qquad \{\delta\}=\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}$$

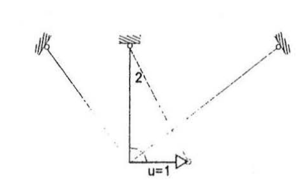
$$\Delta_1=\frac{3}{5}\cdot 1=0{,}6$$

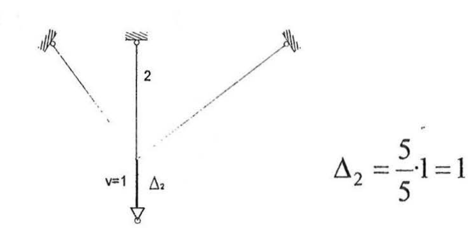




$$\Delta_1=\frac{4}{5}\cdot 1=0{,}8$$

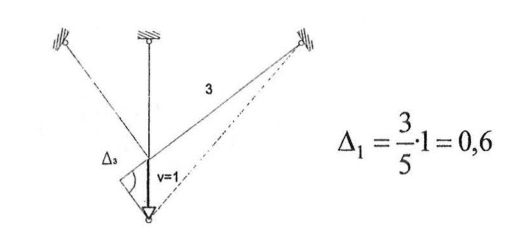
$$\Delta_2=0$$





$$\Delta_2=\frac{5}{5}\cdot 1=1$$

$$\Delta_3=\frac{-4}{5}\cdot 1=-0{,}8$$



$$\Delta_1=\frac{3}{5}\cdot 1=0{,}6$$

$$\begin{Bmatrix}\Delta_1\\\Delta_2\\\Delta_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}6 & 0{,}8\\0 & 1\\-0{,}8 & 0{,}6\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\delta_1\\\delta_2\end{Bmatrix}$$

6.- **Cálculo de la matriz de rigidez** $[k]$

$[K]=[B]^T\cdot[K_u]\cdot[B]$; demostración:

$$[B]=\begin{bmatrix}0{,}6 & 0{,}8\\0 & 1\\-0{,}8 & 0{,}6\end{bmatrix}$$

En un movimiento arbitrario de la estructura var$\{\delta\}$ **el trabajo de las fuerzas exteriores será igual al de las fuerzas interiores**:

T. fuerzas exteriores = T. fuerzas interiores

$\text{var}\{\delta\}^T\cdot\{P\}=\text{var}\{\Delta\}^T\cdot\{N\}$

$\text{var}\{\Delta\}^T=\text{var}\{\delta\}^T\cdot[B]^T$ —ver 5—

$\{N\}=[K_u]\cdot\{\Delta\}$ —ver 4—

$\{\Delta\}=[B]\cdot\{\delta\}$ —ver 5—

Sustituyendo en el segundo miembro:

$var\{\delta\}^T \cdot \{P\} = var\{\delta\}^T \cdot [B]^T \cdot [K_u] \cdot [B] \cdot \{\delta\}$

$\{P\}=[K]\cdot\{\delta\}$ siendo $[K]=[B]^T\cdot[K_u]\cdot[B]$, lo que permite calcular [K]: **MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA**

$$[K]=\begin{bmatrix}0,6 & 0 & -0,8\\ 0,8 & 1 & 0,6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0,6 & 0,8\\ 0 & 1\\ -0,8 & 0,6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4,8 & 0 & -4,8\\ 6,4 & 10 & 3,6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0,6 & 0,8\\ 0 & 1\\ -0,8 & 0,6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6,72 & 0,96\\ 0,96 & 17,28\end{bmatrix}$$

7.- **Cálculo del movimiento.**

Basta invertir la matriz para calcular el movimiento de la estructura

$\{\delta\}=[K]^{-1}\cdot\{P\}$

$$[K]^{-1}=\begin{bmatrix}17,28 & -0,96\\ -0,96 & 6,72\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{115,20}$$

$$\underset{\text{en mm}}{[\delta]}=\begin{bmatrix}17,28 & -0,96\\ -0,96 & 6,72\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{115,20}\cdot\begin{Bmatrix}0\\ 200\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-1,67\\ 11,63\end{Bmatrix}$$

8.- **Explotación del éxito.**

El conocimiento de δ permite calcular los cambios de longitud de las barras $\{\Delta\}$ y a partir de ellos las deformaciones $\{\varepsilon\}$ y las tensiones $\{\sigma\}$

$$\underset{\text{en mm}}{[\Delta]}=\begin{bmatrix}0,6 & 0,8\\ 0 & 1\\ -0,8 & 0,6\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}-1,67\\ 11,63\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}8,3\\ 11,63\\ 8,3\end{Bmatrix}$$

$$\underset{\text{adimensional}}{\{\varepsilon\}}=\begin{Bmatrix}8,3/15\\ 11,63/12\\ 8,3/20\end{Bmatrix}\cdot 10^{-3}=\begin{Bmatrix}0,55\\ 0,97\\ 0,42\end{Bmatrix}\cdot 10^{-3}$$

$$\text{en N}\cdot\text{mm}^{-2}\quad \{\sigma\}=\begin{Bmatrix}110\\ 194\\ 83\end{Bmatrix}$$

$\{\Delta\}=[B]\cdot\{\delta\}$ $\{\Delta\}\Rightarrow\{\varepsilon\}\Rightarrow\{\sigma\}\Rightarrow\{N\}$

$$[N]=[k_u]\{\delta\}=\begin{bmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}8,3\\ 11,6\\ 8,3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}66,4\\ 116,3\\ 49,8\end{Bmatrix}$$

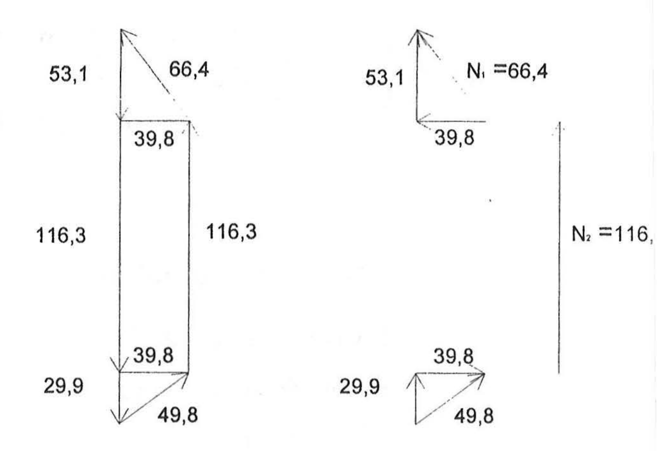
en kN

9.- **Comprobación de la seguridad $\sigma_{máx}\leq f$**

$$\sigma_{máx}=\frac{116,3}{600}\cdot 100=194\ \text{N}\cdot\text{mm}^{-2}<200\ \text{N}\cdot\text{mm}^{-2}$$

10.- Verificación del equilibrio.

A partir de las solicitaciones de las barras debe comprobarse que realmente la estructura está en equilibrio



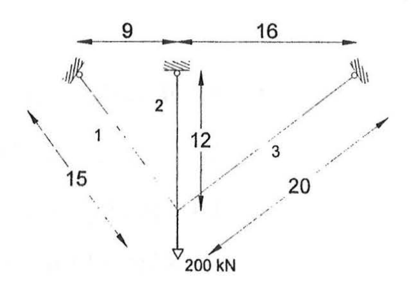
Suma de componentes horizontales de solicitación:

$-39{,}8 + 39{,}8 = 0$

Suma de componentes verticales de solicitación:

$53{,}1 + 116{,}3 + 29{,}9 = 199{,}3 \simeq 200$

Luego la solución es correcta.

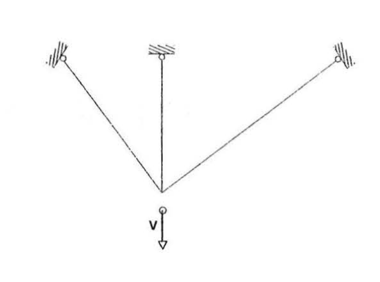


Ejemplo. **Si se toma un sistema de grados de libertad que no describa la estructura**, se obtiene no obstante una solución.

Si en el ejemplo anterior sólo se considera como grado de libertad el descenso v, obviando el desplazamiento horizontal, los resultados que se obtienen son:

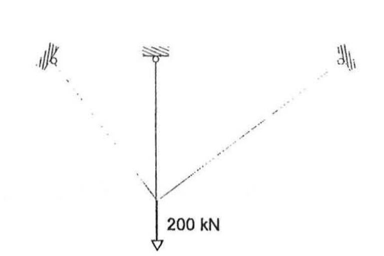
$$\{\delta\} = \{v\}$$

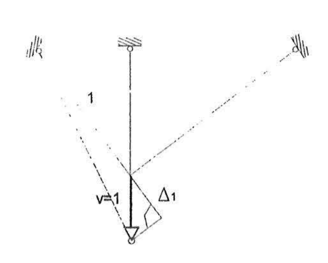
$$\{P\} = \{200\}$$



$$K_u = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \text{kN·mm}^{-1}$$

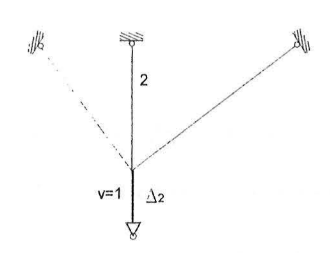
$$B = \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 1 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}$$





$$[K]=[B]^T\cdot[K_u]\cdot[B]=[0{,}8\quad 1\quad 0{,}6]\cdot\begin{bmatrix}8&0&0\\0&10&0\\0&0&6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0{,}8\\1\\0{,}6\end{bmatrix}=$$

$$(5{,}12+10+2{,}16=17{,}28$$

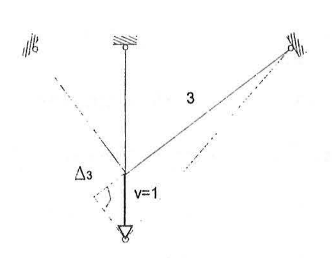


Conocida [K] como {P}=[K]·[δ]

δ= v = P/K = 200/17,28 = 11,57

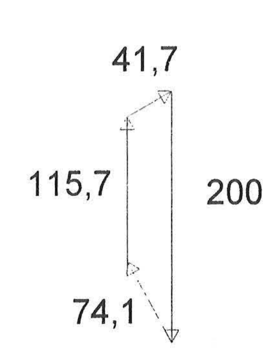
La diferencia entre este resultado y el obtenido considerando dos grados de libertad —v = 11,63— es pequeña pero existe.

El emplear un número de grados de libertad menor que el necesario va contra la seguridad, ya que da lugar a modelos más rígidos y resistentes que la estructura real.



Si se continúa el proceso:

$$\{\Delta\}=[\mathbf{B}]\{\delta\}=\begin{bmatrix}0{,}8\\1\\0{,}6\end{bmatrix}11{,}52=\begin{Bmatrix}0{,}926\\11{,}57\\0{,}694\end{Bmatrix}$$



$$\{\mathbf{N}\}=[\mathbf{k}_u]\{\Delta\}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&10&0\\0&0&6\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0{,}926\\11{,}57\\0{,}644\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}74{,}1\\115{,}7\\41{,}7\end{Bmatrix}$$

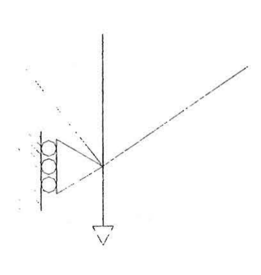
de la comprobación de equilibrio vertical resulta:

$$200-\frac{4}{5}\cdot 74{,}1-115{,}7-\frac{3}{5}\cdot 41{,}7=0$$

que hay equilibrio de fuerzas verticales,

y de la de equilibrio horizontal:

$$\frac{3}{5}\cdot 74{,}1-\frac{4}{5}\cdot 41{,}7=44{,}5-33{,}4=11{,}1$$



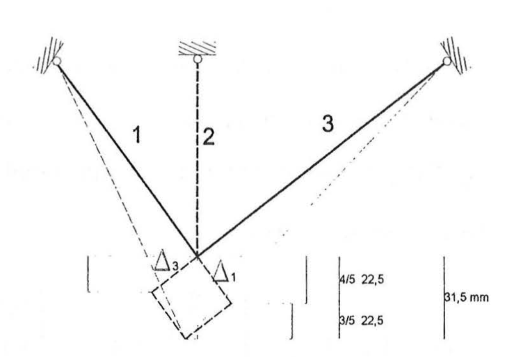
que hay equilibrio de fuerzas horizontales (al no haber considerado la posibilidad de movimiento horizontal es como si el modelo hubiese incluido un apoyo horizontal en dilatación)

PROCESO DE DEFORMACIÓN Y RUINA

Uniendo la información obtenida anteriormente puede establecerse la gráfica P/δ de la estructura hasta la rotura.

En general, la progresiva plstificación de partes de la estructura se traduce en pérdidas de rigidez expresadas en una menor pendiente de la gráfica.

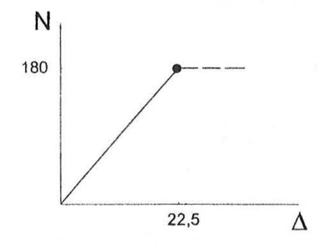
Para la carga última la situación es:



- la barra 1 se encuentra en el límite elástico por lo que $\Delta_1 = 1{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 15 = 22{,}5$ mm
- la barra 3 tiene una solicitación de 135 kN < 180 está pues en período elástico y $\Delta_3 = \frac{N}{K} = \frac{135}{6} = 22{,}5$ mm
- el descenso δ_u puede calcularse de forma geométrica (ver figura) o usando trabajos virtuales $\delta_u \cdot 1 = 0{,}8 \cdot 22{,}5 + 0{,}6 \cdot 22{,}5 = 31{,}5$ lo que permite obtener el punto C de la gráfica P/δ (página siguiente)

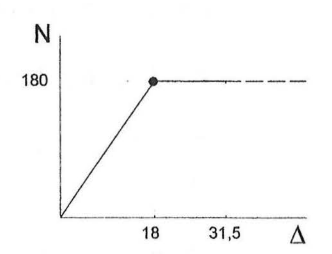
en el momento del colapso la situación de cada barra viene expresada por los siguientes diagramas

Para cada una de las barras, $\Delta_e = \varepsilon_e \cdot L = 1{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot L$



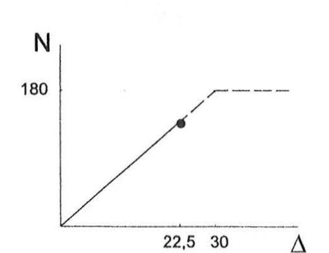
barra 1 $\Delta_e = 1{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 15 = 22{,}5$

$\Delta = \Delta_e$



barra 2 $\Delta_e = 1{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 12 = 18$

$\Delta = 31{,}5 > \Delta_e$



barra 3 $\Delta_e = 1{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 20 = 30$

$\Delta = 22{,}5 < \Delta_e$

En servicio el descenso de la carga es de 11,63 mm para una tensión de 194 $N \cdot mm^{-2}$ en la barra más desfavorable:

Lo que corresonde al punto **A** de la gráfica

- Si se aumenta paulatinamente la carga hasta el límite elástico de la barra 2, (hasta que su tensión llegue a los 300 $N \cdot mm^{-2}$) que corresponde a un descenso:

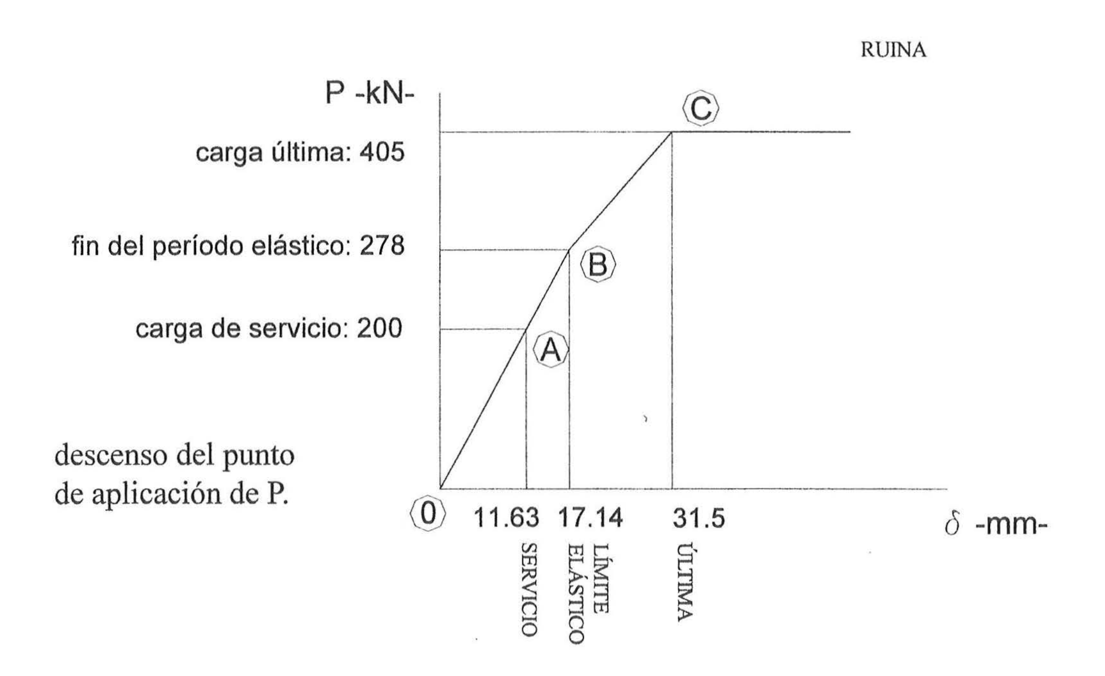
  $\delta = 11{,}63 \cdot \dfrac{300}{194} = 17{,}14$ mm que se produce para una carga

  $$P = 180 \cdot \frac{300}{194} = 278 \text{ kN}$$

Se obtiene el punto **B** de la gráfica, final del período elástico

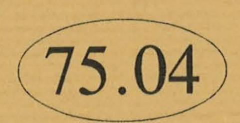
- Si continua el aumento de carga, la barra 2 se plastifica, lo que se traduce en una pérdida de rigidez de la estructura (línea **BC** del diagrama), más pendiente que la **OA**

- Para la carga última de 405 kN la deformación es ya de 31,5 mm y se inicia la ruina de la estructura con una carga 2,025 veces mayor que la de servicio.



NOTAS

CUADERNO



CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/of/jherrera
info@mairea-libros.com

